

FÍSICA: MECÁNICA Y ONDAS

SISTEMAS NO INERCIALES. FUERZAS FICTICIAS

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

En el Tema de Dinámica se dijo que las Leyes de Newton solo se verificaban exactamente en sistemas inerciales (sin aceleración o fijos). En los problemas hasta ahora, se ha supuesto que se verifica esa premisa. En ocasiones, podemos despreciar el movimiento del sistema, pero en este tema vemos cómo actuar cuando esto no es posible usando Análisis y Geometría.

1. Transformaciones de Galileo

El mismo movimiento, puede ser percibido de forma distinta por dos observadores, por ejemplo, uno en reposo, y otro en movimiento respecto al primero.

En esta sección, nos ocupamos de determinar qué ocurre si cambiamos de un sistema inercial a otro que también lo sea y deducir si esto afecta a la observación del movimiento. Esto se ha comentado de forma transversal el Tema 1 al hablar de la elección del sistema, pero ahora lo desarrollamos analíticamente.

Suponemos dos sistemas en el espacio, ambos inerciales $S = \{O, X, Y, Z\}$ y $S' = \{O', X', Y', Z'\}$ y llamamos $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$ a los radios vectores o vectores de posición de una partícula respecto a cada uno de ellos. Si ambos son inerciales y no actúan fuerzas sobre la partícula, se verifica:

$m\ddot{\mathbf{r}} = 0$ y $m\ddot{\mathbf{r}}' = 0 \Rightarrow$ restando ambas $m(\ddot{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{r}}') = 0 \Rightarrow \ddot{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{r}}' = 0$
 integrando ambos miembros $\Rightarrow \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}' = \mathbf{c}$, $\mathbf{c}$ vector constante,
 integrando de nuevo $\Rightarrow \mathbf{r} - \mathbf{r}' = \mathbf{c}t + \mathbf{b}$, $\mathbf{b}$ vector constante

Se cumple la 1ª ley de Newton

sistema inercial: observador no acelera
 sistema no inercial: observador acelera

Luego:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{c}t - \mathbf{b}^*$$

que es a lo que llamamos una **transformación de Galileo**: transformación entre sistemas que conserva el carácter inercial.

Como hemos supuesto que no actúan fuerzas, comprobamos que una transformación de Galileo preserva las fuerzas.

Si los sistemas S y S' son inerciales, vemos cómo afecta si la partícula de masa m está en movimiento sometida a una fuerza. Por ser inerciales, se verifica simultáneamente la segunda Ley de Newton: $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ y $m\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F}'$. Restando ambas y usando la relación *:

$$m(\ddot{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{r}}') = \mathbf{F} - \mathbf{F}' = 0$$

Luego $\mathbf{F} = \mathbf{F}' \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{a}'$. Como conclusión, las ecuaciones del movimiento permanecen invariables tras estas transformaciones. Este es el motivo por el que podíamos elegir distintos sistemas en los problemas de Dinámica, por ejemplo en los planos inclinados, y la solución final no variaba (evidentemente, las componentes de las fuerzas sí lo hacían).

Se puede comprobar (ejercicio) que las transformaciones de Galileo constituyen un grupo.

??

2. Relación general entre sistemas de coordenadas

Supongamos que tenemos un sistema inercial S y otro no inercial S' en un espacio euclídeo orientado. Obviamente, el movimiento será distinto respecto de cada uno de ellos: lo sabemos de forma empírica (sentados en un vehículo en marcha, percibimos nuestra posición en el mismo fija, mientras que los elementos del exterior se mueven, en sentido contrario a cómo se vería el movimiento del vehículo desde el exterior). Ahora vamos a cuantificar esa diferencia geométricamente.

Sean $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$ los radios vectores de un mismo punto respecto de cada uno de ellos.

El movimiento de S' respecto a S de forma que se preserve la métrica y la orientación, se puede describir respecto del tiempo por D_t que los relacione. Cada relación tipo D_t puede descomponerse en las únicas isometrías que conservan la orientación: **traslaciones y rotaciones** (como se vió para el plano en EMA y AL, la reflexión, es isometría pero no conserva la orientación, y la demostración, es fácilmente generalizable a $\mathbb{R}^3$). Así tenemos también una generalización de la sección 1.

Llamaremos:

$$D_t = B \circ C; \quad C = \underbrace{\mathbf{r} + \mathbf{b}(t)}_{\text{traslación}}; \quad B = \underbrace{\mathbf{R}(t)}_{\text{rotación}}$$

- $\mathbf{r}$ = vector posición del objeto visto desde S (absoluto).
- $\mathbf{r}'$ = vector posición del objeto visto desde S' (relativo).
- El origen de S' se mueve respecto a S con una trayectoria $\mathbf{b}(t)$ (traslación).
- Además, S' puede estar rotando respecto a S , con una matriz de rotación $\mathbf{R}(t)$.

con $\mathbf{b}(t)$ vector y $\mathbf{R}(t)$ matriz de rotación/es.

$$\mathbf{r} = D_t \mathbf{r}' = B_t \mathbf{r}' + \mathbf{b}$$

La relación general es:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{r}' + \mathbf{b}(t)$$

(Eso significa: para pasar de $\mathbf{r}'$ a $\mathbf{r}$, primero rotas el vector $\mathbf{r}'$ según $\mathbf{R}$, y luego le sumas la posición del origen de S').

Del mismo modo, se pueden relacionar las velocidades en uno y otro sistema:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \underbrace{\dot{\mathbf{r}}'}_{\mathbf{v}'} + \underbrace{B \dot{\mathbf{r}}'}_{(B \mathbf{v}')} + \dot{\mathbf{b}}$$

que pasamos a analizar descomponiendo en casos más sencillos.

2.1. Movimiento de traslación

En el caso de S' en movimiento respecto a S descrito por una traslación, tenemos que $B = I; \dot{B} = 0$, luego la relación entre velocidades es:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \underbrace{\dot{\mathbf{r}}'}_{\mathbf{v}'} + \underbrace{\dot{\mathbf{b}}}_{\mathbf{v}_o}$$

$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ velocidad absoluta

$\mathbf{v}'$ velocidad relativa (en el sistema móvil)

$\mathbf{v}_o$ velocidad del sistema S'

Así, en el ejemplo con que se iniciaba la sección, veríamos a los objetos fijos desplazarse en sentido contrario al movimiento y en la misma dirección, puesto que $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_o$.

$\mathbf{v}$ será nula en el caso de elementos fijos del entorno del móvil, pero los vemos desplazarse con velocidad $\mathbf{v}_o$ en sentido contrario a la marcha (signo menos).

2.2. Movimiento de rotación

Comenzamos viendo solo el movimiento que imprime a la partícula la rotación de S' , para ello, suponemos que está en reposo respecto a $S' \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}' = \mathbf{0}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Aunque la partícula esté en reposo, respecto al sistema inercial S vemos que tendría un movimiento de rotación transferida.

La relación entre radios vectores y velocidades en este caso queda:

$$\mathbf{r} = B\mathbf{r}' + \mathbf{b} = B\mathbf{r}'$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{B}\mathbf{r}' + B\dot{\mathbf{r}}' + \dot{\mathbf{b}} = \dot{B}\mathbf{r}'$$

como $\mathbf{r} = B\mathbf{r}' \Rightarrow \dot{\mathbf{r}} = \dot{B} \underbrace{B^{-1}\mathbf{r}}_{\mathbf{r}'} = A\mathbf{r}$ con $A = \dot{B}B^{-1}$.

- A es antisimétrica: $A + A^T = 0$

Demostración

B es ortogonal por serlo las matrices de rotación, luego $B^T = B^{-1}$

$\Rightarrow BB^T = I$ y derivando esta expresión:

$$\underbrace{\dot{B} B^T}_{B^{-1}} + \underbrace{B \dot{B}^T}_{(\dot{B} B^T)^T = (\dot{B} B^{-1})^T} = A + A^T = 0$$

- El producto por una A antisimétrica en un espacio vectorial euclídeo orientado es análogo a producto vectorial por un vector fijo: $A\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$

$$\mathbf{v} = \dot{B}\mathbf{r}' = \dot{B}B^{-1}\mathbf{r} = A\mathbf{r}$$

Demostración

A es antisimétrica luego $a_{ii} = 0; a_{ij} = -a_{ji}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{r} = \begin{pmatrix} -\omega_3 r_2 + \omega_2 r_3 \\ \omega_3 r_1 - \omega_1 r_3 \\ -\omega_2 r_1 + \omega_1 r_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

Se puede ver que $\boldsymbol{\omega}$ es un autovector de A con autovalor 0.

La rotación transferida imprime una velocidad $\dot{B}\mathbf{r}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ con $\boldsymbol{\omega}$ vector velocidad angular instantánea que depende de t por hacerlo así B .

Se define el *eje instantáneo de rotación* como la recta cuyos puntos en un momento dado tienen una rotación nula, por lo que $\boldsymbol{\omega}$ marca la dirección de dicho eje. La velocidad del resto de los puntos es perpendicular al eje y proporcional a la distancia que los separa de él, por serlo el producto vectorial. Llamaremos $\boldsymbol{\omega}'$ al vector velocidad angular expresado respecto al sistema S' , luego $\boldsymbol{\omega}' = B^{-1}\boldsymbol{\omega}$.

Un **eje instantáneo de rotación** es el eje alrededor del cual un objeto **está girando en un**

instante concreto, aunque un instante después ese eje pueda cambiar de dirección o de posición.

Porque si conoces el **eje instantáneo de rotación** y la **velocidad angular** alrededor de él, puedes calcular la velocidad de cualquier punto del cuerpo rígido como:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

RARO RARO

$S \rightarrow$ sistema inercial
 $S' \rightarrow$ sistema no inercial

} movimiento de S' respecto de S

Llamaremos:

- $\mathbf{r}$ = vector posición del objeto **visto desde S** (absoluto).
- $\mathbf{r}'$ = vector posición del objeto **visto desde S'** (relativo).
- El origen de S' se mueve respecto a S con una trayectoria $\mathbf{b}(t)$ (traslación).
- Además, S' puede estar rotando respecto a S , con una matriz de rotación $\mathbf{R}(t)$.

La relación general es:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{r}' + \mathbf{b}(t)$$

(Eso significa: para pasar de $\mathbf{r}'$ a $\mathbf{r}$, primero rotas el vector $\mathbf{r}'$ según $\mathbf{R}$, y luego le sumas la posición del origen de S').

① TRASLACIÓN PURA

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{b}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}' + \dot{\mathbf{b}}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_0$$

$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v} = \text{velocidad absoluta (velocidad del objeto vista desde } S) \\ \mathbf{v}' = \text{velocidad relativa (velocidad del objeto vista desde } S') \\ \mathbf{v}_0 = \text{velocidad de } S' \text{ (velocidad del origen de } S' \text{ respecto a } S) \end{array} \right.$

② ROTACIÓN PURA (al no haber traslación $\mathbf{b}(t)=0$)

suponemos que está en reposo respecto a $S' \rightarrow \dot{\mathbf{r}}' = 0$

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{r}' \quad (\text{a } \mathbf{R}(t) \text{ lo llamamos } \mathbf{B})$$
$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{r}' + \underbrace{\mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{r}}'}_{=0} \rightarrow \mathbf{v} = \dot{\mathbf{B}} \mathbf{r}'$$

$$\text{como } \mathbf{r} = \mathbf{B} \mathbf{r}' \Rightarrow \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{B}} \underbrace{\mathbf{B}^{-1} \mathbf{r}}_{\mathbf{r}'} = \mathbf{A} \mathbf{r} \text{ con } \mathbf{A} = \dot{\mathbf{B}} \mathbf{B}^{-1}. \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{A} \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \dot{\mathbf{B}} \mathbf{r}'$$

dejamos de suponer ($\dot{\mathbf{r}}' \neq 0$)

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{B}} \mathbf{r}' + \mathbf{B} \dot{\mathbf{r}}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_r$$

O

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_n + \mathbf{v}_r$$

$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ velocidad absoluta

$\mathbf{v}_n$ velocidad de rotación transferida $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$

$\mathbf{v}_r$ velocidad relativa $\mathbf{B} \dot{\mathbf{r}}'$

Si eliminamos la condición de punto en reposo, $\dot{\mathbf{r}}' \neq \mathbf{0}$ y tendremos:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{B}\mathbf{r}' + B\dot{\mathbf{r}}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_r$$

o

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_n + \mathbf{v}_r$$

$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ velocidad absoluta

$\mathbf{v}_n$ velocidad de rotación transferida $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$

$\mathbf{v}_r$ velocidad relativa $B\dot{\mathbf{r}}'$

2.3. Movimiento general

Si unimos los resultados de los dos epígrafes anteriores tenemos:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{B}\mathbf{r}' + B\dot{\mathbf{r}}' + \dot{\mathbf{b}}(t) = \dot{B}B^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{b}(t)) + B(\dot{\mathbf{r}}') + \dot{\mathbf{b}}(t)$$

o

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_n + \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_o$$

$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ velocidad absoluta

$\mathbf{v}_n$ velocidad de rotación transferida $\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{b})$

$\mathbf{v}_r$ velocidad relativa $B\dot{\mathbf{r}}'$

$\mathbf{v}_o$ velocidad de la traslación del sistema S'

3. Fuerzas inerciales o ficticias

Para que se verifique la ecuación del movimiento derivada de la segunda ley de Newton, el sistema de referencia para definir la posición del punto móvil ha de ser inercial. Así, según la notación de la sección anterior, $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$ pero no necesariamente $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}'$.

Las fuerzas inerciales son las correcciones (de ahí el nombre de ficticias) necesarias para describir con leyes de Newton el movimiento de un móvil respecto de un sistema no inercial. Su nombre no debe hacernos pensar que no se perciben, como veremos en su análisis.

3.1. Fuerzas inerciales en un sistema con traslación respecto a una referencia fija

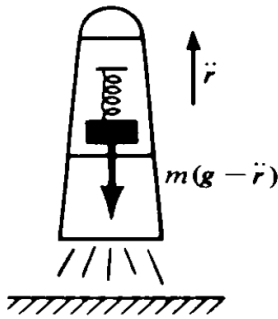
En un sistema S' que se mueve por traslación respecto a un sistema inercial S , el movimiento tiene lugar como si S' fuera inercial, pero actuando además una fuerza inercial $\mathbf{F}_i = -m\ddot{\mathbf{b}}$ con $\ddot{\mathbf{b}}$ aceleración de S' .

Demostración

Según 2. en este caso $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{b} \Rightarrow m\ddot{\mathbf{r}}' = \underbrace{m\ddot{\mathbf{r}}}_{\mathbf{F}} - m\ddot{\mathbf{b}}$

Ejemplo En el momento del despegue, un cohete es impulsado con una fuerza ascendente $m\ddot{\mathbf{r}}$. En el interior, un observador puede detectar, por ejemplo usando un muelle lastrado con un peso, la existencia de una fuerza de inercia: $-m\ddot{\mathbf{b}}$.

Ejemplo Si un vehículo arranca muy rápidamente o bien frena en seco, los pasajeros perciben un empuje hacia detrás o delante que causa el movimiento del vehículo.



Arnold, 1989. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*

3.2. Fuerzas inerciales en un sistema con rotación respecto a una referencia fija

En un sistema S' que rota respecto a un sistema inercial S , el movimiento tiene lugar como si S' fuera inercial, pero actuando además las fuerzas:

1. Inercia de rotación $m(\dot{\omega}' \times \mathbf{r}')$ si esa rotación no es uniforme
2. Efecto de Coriolis $2m(\omega' \times \dot{\mathbf{r}}')$
3. Fuerza Centrífuga $m(\omega' \times (\omega' \times \mathbf{r}'))$

Demostración

De 2.2. sabemos que $\dot{B}\mathbf{r}' = \omega \times \mathbf{r}$ con $\dot{B}$ derivada respecto al tiempo de la matriz de rotación, $\mathbf{r}'$ vector expresado respecto al sistema móvil y $\omega, \mathbf{r}$ vectores expresados respecto al sistema fijo o inercial.

$\mathbf{r} = B\mathbf{r}'$, derivando

$$\dot{\mathbf{r}} = \underbrace{\dot{B}\mathbf{r}'}_{\omega \times \mathbf{r}} + B\dot{\mathbf{r}}' = \underbrace{(B\dot{\omega}') \times B\mathbf{r}'}_{\omega \times \mathbf{r}} + B\dot{\mathbf{r}}' = B(\omega' \times \mathbf{r}') + B\dot{\mathbf{r}}'$$

con lo que tenemos los vectores del segundo miembro descritos en S' , siendo que B preserva métrica y orientación y es lineal, luego $B(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = B\mathbf{a} \times B\mathbf{b}$.

$\dot{\mathbf{r}} = B[(\omega' \times \mathbf{r}') + \dot{\mathbf{r}}']$, derivando de nuevo para obtener aceleraciones (y por lo tanto fuerzas):

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \dot{B}[(\omega' \times \mathbf{r}') + \dot{\mathbf{r}}'] + B[(\dot{\omega}' \times \mathbf{r}') + (\omega' \times \dot{\mathbf{r}}') + \ddot{\mathbf{r}}'] = \\ &= B\ddot{\mathbf{r}}' + B(\dot{\omega}' \times \mathbf{r}') + B(\omega' \times \dot{\mathbf{r}}') + \underbrace{B[\omega' \times (\omega' \times \mathbf{r}') + (\omega' \times \dot{\mathbf{r}}')]}_{\dot{B}[(\omega' \times \mathbf{r}') + \dot{\mathbf{r}}']} = \\ &= B\ddot{\mathbf{r}}' + B(\dot{\omega}' \times \mathbf{r}') + 2B(\omega' \times \dot{\mathbf{r}}') + (B\dot{\omega}' \times B(\omega' \times \mathbf{r}')) \end{aligned}$$

Como $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$ a $\mathbf{F}' = m\ddot{\mathbf{r}}'$ se le habrán de añadir los tres últimos términos de la expresión por la masa para que verifique la segunda Ley de Newton. Estos términos son, expresados en el sistema S : $m(\dot{\omega} \times \mathbf{r})$; $2m(\omega \times \dot{\mathbf{r}})$ y $m(\omega \times (\omega \times \mathbf{r}))$. Así, la fuerza percibida en el sistema no inercial es:

$$\mathbf{F}' = m\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F} - m(\dot{\omega}' \times \mathbf{r}') - 2m(\omega' \times \dot{\mathbf{r}}') - m(\omega' \times (\omega' \times \mathbf{r}'))$$

■ *Fuerza Centrífuga*



Como no depende de la velocidad, aparece incluso si la partícula está en reposo en S' . Su magnitud es proporcional a ω^2 y a d con d distancia al eje de rotación. Apunta hacia fuera en la dirección perpendicular al eje de rotación o dirección del vector ω .

Ejemplo 1:

Se aprecia el efecto de la fuerza centrífuga en ejemplos cotidianos como hacer girar un cubo con agua y que no se derrame, o el proceso de centrifugado de una lavadora.

En ambos casos se produce un movimiento circular, por lo que trabajamos en coordenadas polares. Podemos usar las expresiones deducidas anteriormente, o bien obtener las componentes de la fuerza en ambos sistemas directamente.

Sean las coordenadas polares sobre un sistema S con centro en el centro de la circunferencia que se describe y direcciones fijas, con Z sobre el eje de rotación:

$$\begin{aligned} F_\rho &= m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) \\ F_\theta &= m(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}) \end{aligned}$$

son las componentes de la fuerza en S (ver sección 4.1. de Tema 1, donde se deducen las componentes de la aceleración).

Tomamos otro sistema S' con igual centro y eje Z' que S , pero direcciones X' e Y' que giran solidarios al movimiento (por ejemplo, en el caso de movimiento de un cubo, el origen es el hombro del brazo que lo sostiene, y se podría tomar como eje X' el brazo, que participa del movimiento. En el caso de la lavadora, el origen es el centro del tambor, y se tomaría eje X' una dirección concreta en el mismo.

$$\rho = \rho'; \quad \theta = \theta' + \omega't$$

siendo ω' la velocidad angular de S' respecto a S .

$$\text{Como } \theta = \theta' + \omega't \Rightarrow \dot{\theta} = \dot{\theta}' + \omega' \Rightarrow \ddot{\theta} = \ddot{\theta}'$$

Sustituyendo en la expresión de la fuerza radial en S' :

$$F_{\rho'} = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}'^2) = m[\ddot{\rho} - \rho(\dot{\theta}^2 + \omega'^2 - 2\dot{\theta}\omega')] = F_\rho - m\rho\omega'^2 + 2m\rho\dot{\theta}\omega'$$

Y para un observador desde fuera, en S :

$$F_\rho = F_{\rho'} + m\rho\omega'^2 - 2m\rho\dot{\theta}\omega'$$

El segundo sumando coincide con el módulo de la fuerza centrífuga deducida en la demostración, luego, como se podía ver por propiedades de producto vectorial, solo tiene componente radial. Al ser positiva, tendrá efecto hacia fuera de la circunferencia que describe el movimiento.

Como es proporcional a ω'^2 , tendremos en el caso del cubo, que el agua no se cae, por efecto del empuje, si se hace rotar el cubo rápidamente (el agua es empujada hacia el fondo del cubo con una fuerza de módulo $m\rho\omega'^2$, con m, ρ constantes). Si rotamos despacio el agua se derrama.

Para el caso de la lavadora, al centrifugar gira más deprisa (elegimos las revoluciones pretendiendo eliminar más o menos agua). Al girar más rápido, se incrementa el valor de la fuerza centrífuga, por lo que el contenido del tambor es empujado hacia las paredes del mismo. Al tener agujeros, el agua es

expulsada. Si abrimos la lavadora justo al terminar, también la ropa estará distribuida en los bordes del tambor.

■ Fuerza o Efecto de Coriolis

Vemos por su módulo, que es proporcional a ω' y a la velocidad. Puesto que $\omega' \times \mathbf{v}' \perp \mathbf{v}'$, su efecto es el de desviar una partícula de su trayectoria.

Ejemplo 2: Movimiento sobre un disco giratorio

En el video de campus virtual, apreciamos que se lanza la pelota desde una plataforma giratoria, suponemos que con velocidad siempre en dirección radial (hacia el extremo del diámetro que ocupan los participantes). Sin embargo, no llega a la persona sentada enfrente de quien lo lanza.

Así, por la forma del disco, usamos coordenadas polares. S es un sistema que, si bien no es inercial, no participa del giro de la plataforma y tomamos como inercial en primera aproximación. Para un observador desde fuera, en coordenadas polares sobre S :

$$F_\rho = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)$$

$$F_\theta = m(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})$$

Sea otro sistema S' con direcciones fijas de los ejes X' e Y' sobre el disco y Z' vertical, con centro en el centro del disco. Supongamos que el origen de S es el mismo que el de S' sobre la plataforma, para que no haya traslación. Así, la relación entre ambos viene dada por:

$$\rho = \rho'; \theta = \theta' + \omega't$$

siendo ω' la velocidad angular de la plataforma.

En este caso, por la dirección de la fuerza aplicada:

$$F_{\theta'} = m(\rho'\ddot{\theta}' + 2\dot{\rho}'\dot{\theta}') = 0$$

ya que se lanza hacia el centro del disco, por estar los jugadores sentados de forma diametralmente opuesta, es decir, la fuerza que se imprime solo tiene componente $F_{\rho'}$. Sin embargo, sustituyendo el valor de $\ddot{\theta}'$ y $\dot{\theta}'$:

$$F_{\theta'} = m(\rho'\ddot{\theta}' + 2\dot{\rho}'\dot{\theta}') = m(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}(\dot{\theta} - \omega')) = F_\theta - 2m\omega'\dot{\rho} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_\theta = F_{\theta'} + 2m\omega'\dot{\rho}$$

equivalente a sumar el módulo del efecto Coriolis (el ángulo que forma velocidad angular, paralela al eje, y velocidad, tangente a la plataforma, es $\pi/2$ con seno cero).

No consideramos inercia de rotación, al suponer que la plataforma gira con velocidad constante. Sí hay fuerza centrífuga pero afecta a la componente F_ρ , por lo que no la tenemos en cuenta en este ejemplo.

Así, el movimiento resultante no está dirigido hacia el centro (no es que no alcance al otro jugador porque se ha movido, es que claramente la pelota no pasa por el centro de la plataforma aunque se haya lanzado con una fuerza radial, hacia el centro), por la existencia del término $+2m\omega'\dot{\rho}$.

Excelente pregunta. La clave está en que **ambas fuerzas solo existen si lo ves desde un sistema de referencia NO INERCIAL (rotante)**.

- **Desde un sistema inercial** (ej: mirando desde el espacio, sin rotación):
No ves ni fuerza centrífuga ni de Coriolis. Lo que ves son fuerzas reales (tensión de una cuerda, rozamiento, etc.) que obligan al cuerpo a seguir una trayectoria curva o recta. El cuerpo no "sale disparado" porque la fuerza real le da la aceleración centrípeta necesaria.
- **Desde un sistema no inercial que gira** (ej: estás dentro del carrusel o sobre la Tierra rotando):
Para poder usar las leyes de Newton como si el sistema fuera quieto, necesitas inventar esas fuerzas ficticias.
 - La **centrífuga** "explica" por qué sientes que te empujan hacia afuera (en realidad, en el inercial tu cuerpo tiende a seguir recto y la fuerza real te empuja hacia adentro).
 - La **de Coriolis** "explica" la desviación de los objetos que se mueven dentro del sistema rotante.

Resumen:

- **Inercial:** No hay centrífuga ni Coriolis. Solo fuerzas reales y aceleraciones reales.
- **No inercial (rotante):** Aparecen centrífuga y Coriolis como fuerzas ficticias necesarias para que la física tenga sentido.



4. Efecto sobre Tierra en rotación

En los problemas de Dinámica, despreciamos el movimiento de la Tierra, y supusimos que cualquier sistema de coordenadas usado era inercial. Sin embargo, la rotación de la Tierra afecta sensiblemente algunos experimentos.

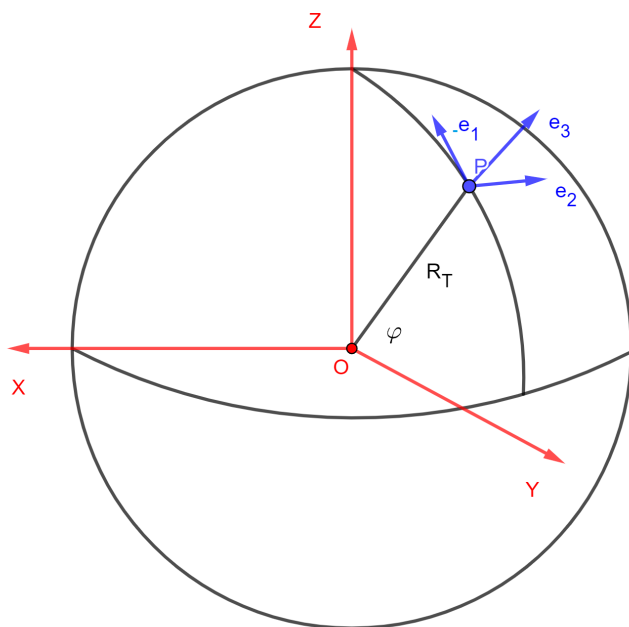
La fuerza centrífuga actúa sobre todos los objetos, incluso si están en reposo respecto a la Tierra. Al ser directamente proporcional a la distancia al eje de rotación, es máxima en el ecuador terrestre. Incluso en ese caso, $\omega^2 R_T$, con R_T radio de la Tierra, su valor es aproximadamente $3.38 \text{ cm/s}^2 \approx 0,3$ por ciento de la aceleración de la gravedad. Por estos dos motivos, o se desprecia o se incluye en el cómputo preciso de esta, g .

Si suponemos en primera aproximación la rotación como uniforme, no hay inercia de rotación al ser nula la derivada de la velocidad angular de rotación.

En cuanto al efecto de Coriolis, sí es apreciable al hacer que se desvíe un cuerpo cayendo de la vertical, materializada por la línea de la plomada, y en los movimientos sobre la Tierra (ver ejemplos y video del campus).

Tomamos la Tierra como esférica en primera aproximación. Sea S un sistema con O origen en el centro de la Tierra, eje Z en la dirección del eje de rotación, y X e Y sobre el plano del ecuador en unas direcciones fijas en el espacio formando triedro directo (en rojo en la figura). Son fijas respecto al espacio y no respecto a la Tierra, porque en ese caso, también rotarían con ella.

Por otro lado, sea S' un sistema de centro un punto P de la Tierra, por lo que obviamente no es inercial. $S' = \{P, e_1, e_2, e_3\}$ con e_3 dirección de la vertical, e_2 dirección al este sobre la horizontal y e_1 al sur (azul en la figura) de forma que configuren un triedro directo. Siempre que se verifique esto último, se pueden elegir de cualquier otra forma, como se ve en la bibliografía.



La relación entre ambos viene definida por una traslación con $\mathbf{b} = R_t e_3$ y por la rotación de la Tierra. El vector ω es paralelo al eje de rotación, ver 2.2., por lo que tendrá de coordenadas en ambos sistemas:

$$\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)_S$$

$$\boldsymbol{\omega}' = (-\omega \cos \varphi, 0, \omega \sin \varphi)_{S'} \text{ (ver tema 1, coordenadas esféricas)}$$

con φ latitud de P. Al elegir que uno de los ejes del sistema S' , en este caso e_1 , verifique que $\boldsymbol{\omega}$ esté contenido en el plano que generan e_1 y e_3 , se anula la segunda componente en S' y resulta un vector más sencillo.

Ejemplo 3: Movimiento general

No aparece la traslación al ser nula la derivada $\dot{\mathbf{b}}$ porque la distancia al centro del sistema S no depende del tiempo, ni inercia de rotación si consideramos velocidad de rotación constante, $\dot{\mathbf{B}} = \mathbf{0}$ y la fuerza centrífuga la suponemos incluida en $\mathbf{g}$.

La fuerza ficticia que aparece (efecto Coriolis, $2m(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{v}')$) es un vector perpendicular a los vectores eje de rotación y velocidad en S' y su módulo es $2m\omega'v'$ según la propia definición del producto vectorial.

En general, en cualquier movimiento próximo a la superficie terrestre, tendremos que al ser el vector $\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{v}'$ perpendicular a la velocidad $\mathbf{v}'$, el efecto de la fuerza de Coriolis es desviar a un móvil de su trayectoria:

$$\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{v}' = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \omega'_1 & 0 & \omega'_3 \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = (-\omega \sin \varphi \dot{y}, \omega(\dot{x} \sin \varphi + \dot{z} \cos \varphi), -\omega \dot{y} \cos \varphi)$$

y las ecuaciones del movimiento:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= f'_1 = f_1 + 2m\omega \sin \varphi \dot{y} \\ m\ddot{y} &= f'_2 = f_2 - 2m\omega(\dot{x} \sin \varphi + \dot{z} \cos \varphi) \\ m\ddot{z} &= f'_3 = f_3 + 2m\omega \dot{y} \cos \varphi \end{aligned}$$

con $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3)$. Vemos que va a afectar a la fuerza efectiva $\mathbf{F}' = (f'_1, f'_2, f'_3)$ que se trate del hemisferio norte o sur, por cambiar la primera y segunda componente donde aparece $\sin \varphi$.

Para no complicar la notación, llamamos x, y, z a las coordenadas en S' , sin incluir '

Ejemplo 4: Caída de un cuerpo

Según lo visto en las secciones 3.1. y 3.2., para un cuerpo que cae en P , además de la fuerza peso aparecen otras fuerzas:

$$\mathbf{F}_{\text{fect}} = \mathbf{F}' = \underbrace{-m\mathbf{g}}_{\mathbf{F}} - 2m(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}')$$

Un objeto de masa m inicialmente en reposo, se deja caer desde una altura h pequeña en comparación con el radio terrestre. Si suponemos velocidad de rotación constante, demostrar que se desvía hacia el este una cantidad $\frac{1}{3}\omega g t^3 \cos \varphi$.

Inicialmente sus coordenadas en S' son $x = 0; y = 0; z = h$. Sustituimos en las ecuaciones de movimiento del ejemplo anterior:

$$\ddot{x} = 2\omega \sin \varphi \dot{y} \Rightarrow \dot{x} = 2\omega \sin \varphi y + C_1, \text{ ya que no hay componente } x \text{ de la fuerza.}$$

Con las condiciones iniciales, que era partir del reposo, queda $0 = 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$ luego

$$\dot{x} = 2\omega \sin \varphi y \quad (1)$$

$$\ddot{y} = -2\omega(\dot{x} \sin \varphi + \dot{z} \cos \varphi) \Rightarrow \dot{y} = -2\omega(x \sin \varphi + z \cos \varphi) + C_2$$

con las condiciones iniciales:

$$0 = -2\omega h \cos \varphi + C_2 \text{ luego } C_2 = 2\omega h \cos \varphi \text{ y}$$

$$\dot{y} = -2\omega(x \sin \varphi + z \cos \varphi) + 2\omega h \cos \varphi \quad (2)$$

$$\ddot{z} = -g + 2\omega \dot{y} \cos \varphi \text{ que, sustituyendo } \dot{y} \text{ y despreciando los sumandos con } \omega^2 \approx 10^{-10} \text{ queda}$$

$$\ddot{z} = -g \Rightarrow \dot{z} = -gt + C_3$$

$$\text{de nuevo con las condiciones iniciales } 0 = C_3 \text{ y } \dot{z} = -gt \quad (3)$$

Como nos interesa la desviación hacia el este, tomamos $\ddot{y}$ con las expresiones (1) y (3):

$$\ddot{y} = -2\omega \left(\underbrace{2\omega y \sin^2 \varphi}_{\dot{x} \sin \varphi} - \underbrace{gt \cos \varphi}_{\dot{z}} \right) \approx 2\omega gt \cos \varphi \text{ despreciando de nuevo } \omega^2 \approx 10^{-10}$$

$$\Rightarrow \dot{y} = \omega gt^2 \cos \varphi + C_4 \text{ que con las condiciones iniciales: } 0 = 0 + C_4 \Rightarrow C_4 = 0 \text{ luego:}$$

$$\dot{y} = \omega gt^2 \cos \varphi$$

e integrando de nuevo:

$$y = \frac{1}{3} \omega gt^3 \cos \varphi + C_5 \text{ y tomando el instante inicial } t = 0, 0 = 0 + C_5 \Rightarrow C_5 = 0, \text{ por lo que:}$$

$$y = \frac{1}{3} \omega gt^3 \cos \varphi$$

que será siempre positivo con lo que se demuestra que el desplazamiento es hacia el este para cualquier valor de latitud.

Concluimos expresando además dicho desplazamiento en función de la altura inicial. Para ello, obtenemos t tiempo que tarda en caer en función de la altura usando (3):

$$\dot{z} = -gt \Rightarrow z = -g \frac{t^2}{2} + C_6$$

$$\text{en } t = 0; h = 0 + C_6 \Rightarrow C_6 = h \text{ y } z = -g \frac{t^2}{2} + h$$

cuando llega al suelo $z = 0$ luego el tiempo que tarda en caer es:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \text{ que sustituyendo en la expresión de } y \text{ da un desplazamiento al este:}$$

$$y = \frac{1}{3} \omega g \left(\frac{2h}{g} \right)^{3/2} \cos \varphi = \frac{\omega \cos \varphi}{3} \sqrt{\frac{8h^3}{g}}$$

Para hacerse una idea, para latitud 0, en una caída de 100m se desvía 2.2 cm

Ejemplo 5:

Un proyectil se lanza en un lugar de latitud φ del hemisferio norte con velocidad v_o en dirección sur, formando un ángulo θ con la horizontal. Coordenadas del punto donde cae de nuevo al suelo. Demostrar que se desvía del plano original de lanzamiento una cantidad:

$$\frac{4\omega v_o^3 \sin^2 \theta}{3g^2} (\sin \theta \cos \varphi + 3 \sin \varphi \cos \theta)$$

y comprobar si es hacia el este o hacia el oeste.

Es un problema similar pero con velocidad inicial. Las condiciones iniciales son: $t = 0, x = y = z = 0; v_{ox} = v_o \cos \theta; v_{oy} = 0; v_{oz} = v_o \sin \theta$

De las ecuaciones de movimiento, actuando como en el ejemplo anterior:

$$\ddot{x} = 2\omega \sin \varphi \dot{y} \Rightarrow \dot{x} = 2\omega \sin \varphi y + C_1 \text{ solo depende de } y.$$

Con las condiciones iniciales queda $C_1 = v_o \cos \theta$ luego

$$\dot{x} = 2\omega \sin \varphi y + v_o \cos \theta \quad (1)$$

$$\ddot{y} = -2\omega(\dot{x} \sin \varphi + \dot{z} \cos \varphi) \Rightarrow \dot{y} = -2\omega(x \sin \varphi + z \cos \varphi) + C_2$$

Con las condiciones iniciales: $0 = C_2$ luego

$$\dot{y} = -2\omega(x \sin \varphi + z \cos \varphi) \quad (2)$$

$\ddot{z} = -g + 2\omega \dot{y} \cos \varphi$ que como depende solo de $\dot{y}$, sustituyendo (2) y despreciando sumandos con ω^2 (ver ejemplo 4):

$$\ddot{z} = -g \Rightarrow \dot{z} = -gt + C_3 \text{ de nuevo con las condiciones iniciales } v_o \sin \theta = C_3 \text{ y}$$

$$\dot{z} = -gt + v_o \sin \theta \Rightarrow z = -\frac{gt^2}{2} + v_o \sin \theta t + C_4$$

Sustituyendo las condiciones iniciales: $0 = 0 + C_4 \Rightarrow C_4 = 0 \Rightarrow$

$$z = -\frac{gt^2}{2} + v_o \sin \theta t \quad (3)$$

Tomamos $\ddot{y}$, (1) y (3) despreciando sumandos con ω^2 :

$$\ddot{y} = -2\omega(\dot{x} \sin \varphi + \dot{z} \cos \varphi) = -2\omega(v_o \cos \theta \sin \varphi + (-gt + v_o \sin \theta) \cos \varphi) = -2\omega(-gt \cos \varphi + v_o \sin(\varphi + \theta))$$

Integrando:

$$\dot{y} = -2\omega\left(-\frac{gt^2}{2} \cos \varphi + v_o t \sin(\varphi + \theta)\right) + C_4$$

si $t = 0; 0 = C_4$

Integrando de nuevo:

$$y = \frac{\omega gt^3}{3} \cos \varphi - \omega v_o t^2 \sin(\varphi + \theta) + C_5$$

si $t = 0; 0 = C_5$ e $y = \frac{\omega g t^3}{3} \cos \varphi - \omega v_o t^2 \sin(\varphi + \theta)$

Por último, de (1):

$$\dot{x} = 2\omega \sin \varphi y + v_o \cos \theta = 2\omega \sin \varphi \left(\frac{\omega g t^3}{3} \cos \varphi - \omega v_o t^2 \sin(\varphi + \theta) \right) + v_o \cos \theta \approx v_o \cos \theta$$

Integrando:

$$x = v_o \cos \theta t + C_6 \text{ y si } t = 0; 0 = C_6 \Rightarrow x = v_o \cos \theta t$$

Para terminar, buscamos el valor t . Cuando cae al suelo $z = 0$ luego en (3):

$$0 = t \left(-\frac{gt}{2} + v_o \sin \theta \right) \Rightarrow t = \frac{2v_o \sin \theta}{g} \text{ (hay otra solución pero corresponde al instante inicial } t = 0 \text{)}.$$

Las coordenadas en el momento que cae al suelo son, sustituyendo t :

$$\begin{aligned} x &= v_o \cos \theta \underbrace{\frac{2v_o \sin \theta}{g}}_t = \frac{v_o^2 \sin 2\theta}{g} \\ y &= \frac{\omega g t^3}{3} \cos \varphi - \omega v_o t^2 \sin(\varphi + \theta) = \frac{\omega g}{3} \underbrace{\frac{8v_o^3 \sin^3 \theta}{g^3}}_{t^3} \cos \varphi - \omega v_o \underbrace{\frac{4v_o^2 \sin^2 \theta}{g^2}}_{t^2} \sin(\varphi + \theta) = \\ &= \frac{4\omega v_o^3 \sin^2 \theta}{3g^2} (2 \sin \theta \cos \varphi - 3 \sin(\varphi + \theta)) = \frac{4\omega v_o^3 \sin^2 \theta}{3g^2} (2 \sin \theta \cos \varphi - 3 \sin \varphi \cos \theta - 3 \cos \varphi \sin \theta) = \\ &= -\frac{4\omega v_o^3 \sin^2 \theta}{3g^2} (\sin \theta \cos \varphi + 3 \sin \varphi \cos \theta) \end{aligned}$$

θ es de primer cuadrante luego la cantidad es negativa y por lo tanto, se desvía hacia el oeste.



