

Fórmulas de Newton-Côtes

-1-

□ Sean $f, g \in C([a, b])$, g signo cte en $[a, b]$. $\exists \theta \in (a, b)$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\theta) \int_a^b g(x)dx$$

Si $g \equiv 1$

$$\int_a^b f(x)dx = f(\theta)(b-a)$$

Fórmula del trapecio $x_0 = a$, $x_1 = b$ $h = b - a$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_1))$$

$$R_{(a,b)}(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\theta)$$

Fórmula del trapecio abierta $x_0 = a + h$, $x_1 = a + 2h$ $h = \frac{b-a}{3}$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{2} (f(x_0) + f(x_1))$$

$$R_{(a,b)}(f) = \frac{3h^3}{4} f''(\theta), \theta \in (a, b)$$

Fórmula de Simpson $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$ $h = \frac{b-a}{2}$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$$

$$R_{(a,b)}(f) = -\frac{1}{90} f^{(4)}(\theta_h) h^5$$

- es exacta para polinomios de grado menor o igual a 3

Fórmula de Simpson abierta $h = \frac{b-a}{4}$ $x_0 = a + h$
 $x_1 = a + 2h$
 $x_2 = a + 3h$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{4h}{3} (2f(x_0) - f(x_1) + 2f(x_2))$$

$$R_{(a,b)}(f) = \frac{14h^5}{45} f^{(4)}(\theta)$$

Tres oclavos $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, 2, 3$ $h = \frac{b-a}{3}$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8} (f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3))$$

$$R_{(a,b)}(f) = -\frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\theta)$$

Fórmulas de N-C , $n+1$ puntos $x_i = x_0 + i h$ -2-

a) Fórmulas cerradas , $h = \frac{b-a}{n}$, $x_0 = a$

b) Fórmulas abiertas $h = \frac{b-a}{n+2}$, $x_0 = a+h$

Teorema Sea $n=2k$ (resp. $n=2k+1$) , $f \in C^{2k+2}([a,b])$
El error en las fórmulas de Newton-Cotes (abierto y cerrado para $n+1$ puntos es

$$R_{(a,b)}(f) = \frac{b-a}{(2k+2)!} h^{2k+3} f^{(2k+2)}(\theta) , \theta \in (a,b)$$

obs Si n es par , la derivada es de orden $n+2 \rightarrow$
las fórmulas de N-C con $n+1$ puntos con n -par son
exactas para pol. de gr. $n+1$ (superior en una unidad
al grado esperado)

El orden de error de las fórmulas cerrado es
superior en 2 unidades al de las fórmulas abiertas.

Integración numérica

CapT

-4-

①

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

Quadrature - hallar un cuadrado cuya área coincida con la del cuadrilátero curvilíneo delimitado por $y=0$, $x=a$, $x=b$ y la gráfica de f .

Motivación

Reglas de quadrature

$$I_{N+1}(f) = \alpha_0 f(x_0) + \dots + \alpha_N f(x_N) = \sum_{i=0}^N \alpha_i f(x_i)$$

Fijados N , x_i y α_i - regla de quadrature.
 x_i - abscisas, nodos, α_i - pesos o coeficientes

Regla de los rectángulos

$$I^R(f) = (b-a) f(a)$$

Regla del punto medio

$$I^{PM}(f) = (b-a) f(c) \quad c = \frac{a+b}{2}$$

Regla de los trapecios

$$I^T(f) = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$

Regla de Simpson

$$I^S(f) = \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(c) + f(b)] \quad c = \frac{b+a}{2}$$

Grado de exactitud. $M > 0$ si halla exactamente

la integral de cada polinomio de grado $\leq M$

pero no halla exactamente la integral $M+1$.

- rectángulos - $M=0$
- punto medio - $M=1$
- trapecio - $M=1$
- Simpson - $M=3$.

obtención de reglas de cuadratura.

1) Método interpolatorio

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \quad I_{N+1}(f) = I(P) = \int_a^b P(x) dx.$$

Si P - en Lagrange

$$I_{N+1}(f) = f(x_0) \int_a^b l_0(x) dx + \dots + f(x_N) \int_a^b l_N(x) dx.$$

$$\alpha_i = \int_a^b l_i(x) dx. \quad \text{Regla interpolatoria.}$$

Teorema Dados $N \geq 0$ y $N+1$ x_i , $x_i \neq x_j$, la regla de cuadratura interpolatoria tiene grado de exactitud $\geq N$
Sea si f es pol $\leq N \Rightarrow P \equiv f \Rightarrow I_{N+1}(f) = I(f)$

2) Método de coeficientes indeterminados

$$\text{Grado de exactitud} \geq k \Leftrightarrow I_{N+1}(f) = I(f)$$

con $f = 1, x, x^2, \dots, x^k$

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_N = b-a$$

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_N x_N = \frac{(b-a)^2}{2}$$

$$\dots$$
$$\alpha_0 x_0^k + \alpha_1 x_1^k + \dots + \alpha_N x_N^k = \frac{(b-a)^{k+1}}{k+1}$$

Sistema $k+1$ ec con $N+1$ incógnitas. Si queremos grado $\geq N \Rightarrow$ sol. única.

[T] Dados $N \geq 1$, $N+1$ x_i hay una única elección de los pesos α_i t.q tenga grado $\geq N$. Se resuelve el sistema con $k=N$

[T] Dados $N \geq 0$, $N+1$ x_i , la regla es la única con esas abscisas que tiene grado de exactitud $\geq N$

3) Método de Taylor Cap 7 -5- (2)

Ejemplo

$$N=1 \quad x_0=a \quad x_1=b$$

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + f''(a) \frac{(b-a)^2}{2} + \dots$$

hasta un orden n'u determinar.

$$I_2(f) = \alpha_0 f(a) + \alpha_1 f(b)$$

$$I_2(f) = (\alpha_0 + \alpha_1) f(a) + \alpha_1 (b-a) f'(a) + \alpha_1 \frac{(b-a)^2}{2} f''(a) + \dots$$

$$I(f) = \int_a^b \left[f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2} + \dots \right] dx$$

$$= (b-a) f(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f'(a) + \frac{(b-a)^3}{6} f''(a) + \dots$$

igualando

Mayor grado de ecuaciones

$$\alpha_0 + \alpha_1 = b-a$$

$$\alpha_1 = \frac{b-a}{2}$$

$$\alpha_1 \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{(b-a)^3}{6}$$

Suponemos que el integrando es un pol $\leq k$
Desarrollando Taylor hasta k , el polinomio de Taylor coincide con el integrando y tenemos $k+1$ términos. Las primeras $k+1$ ecuaciones son necesarias y suficientes n'u haya término error.

• Desarrollar en Taylor las $f(x_i)$. El punto puede ser uno de los nodos o cualquier otro

$$c = \frac{a+b}{2} \quad \text{útil}$$

• Desarrollar Taylor $f(x)$ en torno al mismo punto

• Imponer que los términos vayan coincidiendo.

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i) + R(f)$$

$$f(x) = P(x) + E(x)$$

$$P(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b l_i(x) dx + \int_a^b E(x) dx.$$

$$\alpha_i = \int_a^b l_i(x) dx.$$

Teorema de valor medio para integrales.

Un sólo punto x_0

$$P(x) = f(x_0)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x_0) dx + \int_a^b E(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) f(x_0)$$

$$R(f) = \int_a^b f[x_0, x] (x-x_0) dx.$$

$$\underline{x_0 = a} \quad \int_a^b f(x) dx = (b-a) f(a) - \text{Rectángulo}$$

$$R(f) = \int_a^b f'(\xi) \underbrace{(x-a)}_0 = f'(\xi_1) \int_a^b (x-a) dx = f'(\xi) \frac{(b-a)^2}{2}$$

$$f \in C^1([a, b])$$

$$\underline{x_0 = b}$$

$$x_0 = \frac{a+b}{2} \quad \int_a^b f(x) dx \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right) (b-a) - \text{Fórmula del punto medio}$$

No se puede aplicar el T.V.M.I.

$$\text{si } f \in C^2([a, b])$$

$$f[x_0, x] = f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x] (x-x_1)$$

$$x_1 \in [a, b].$$

$$f[x_0, x_1, x] = \frac{f[x_0, x] - f[x_0, x_1]}{x - x_1}$$

$$f[x_0, x] = f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x](x - x_1) \quad | \quad (x - x_0)$$

$$\int_a^b f[x_0, x](x - x_0) dx = \int_a^b f[x_0, x_1](x - x_0) dx +$$

$$+ \int_a^b f[x_0, x_1, x](x - x_0)(x - x_1) dx =$$

$$= f[x_0, x_1] \int_a^b (x - x_0) dx + \int_a^b f[x_0, x_1, x](x - x_0)(x - x_1) dx$$

$$x_1 = x_0 = \frac{a+b}{2}$$

$$R(f) = \int_a^b f[x_0, x_0, x](x - x_0)^2 dx = f[x_0, x_0, \eta] \int_a^b (x - x_0)^2 dx$$

$$= \frac{f''(\xi)}{2!} \int_a^b (x - x_0)^2 dx$$

$$\Rightarrow R(f) = \frac{f''(\xi)}{24} (b-a)^3$$

Fórmula del trapecio.

Fórmula del trapecio - 2 puntos $x_0=a$ $x_1=b$ Capit -7- (1)

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$

$$P_1(x) = f(x_0) + (x-x_0) f[x_0, x_1]$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b f(x_0) + \int_a^b f[x_0, x_1] (x-x_0) dx = \\ &= \int_a^b f(a) + \int_a^b f[a, b] (x-a) dx = f(a)(b-a) + f[a, b] \frac{(b-a)^2}{2} \end{aligned}$$

$$= f(a)(b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{(b-a)}{2} [f(a) + f(b)]$$

Error $E_1(x) = f(x) - P_1(x) = \frac{f''(\xi_x)}{2!} \pi_1(x)$, $x \in [a, b]$

$$R(f) = \int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2!} (x-a)(x-b) dx$$

$$(x-a)(x-b) \leq 0$$

$x \mapsto f''(\xi_x)$ es continua

$$\rightarrow R(f) = \frac{f''(\theta)}{2} \int_a^b (x-a)(x-b) dx = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\theta)$$

$$x_0=a \quad x_1=b \quad h=b-a$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)]$$

$$R(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\theta), \quad \theta \in (a, b).$$

Ej: $f(x) = 4-2x^2$, $x \in [0, 1]$

Fórmula del trapecio abierta.

$$\begin{array}{ccccccc} & & | & & | & & \\ a & & x_0 & & x_1 & & b \end{array}$$

$$h = \frac{b-a}{3} \quad x_0 = a + \frac{b-a}{3} = \frac{2a+b}{3} \quad x_1 = \frac{a+2b}{3}$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3h}{2} [f(x_0) + f(x_1)]$$

$$R(a, b)(f) = \frac{3h^3}{4} f''(\theta)$$

Teorema Valor medio integral generalizado.

Sean $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$ de forma que g no cambie de signo en $[a, b]$. Existe $\theta \in (a, b)$ tq

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\theta) \int_a^b g(x)dx$$

Si $g \equiv 1$ $\int_a^b f(x)dx = f(\theta)(b-a)$, $\theta \in (a, b)$.

Sea Suponemos que $g(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$ ($g \neq 0$). $f \in \mathcal{C}([a, b])$ y

$$m_0 = \min_{a \leq x \leq b} f(x) \quad M_0 = \max_{a \leq x \leq b} f(x).$$

$$\Rightarrow m_0 g(x) \leq f(x)g(x) \leq M_0 g(x), \quad x \in [a, b]$$

$$\Rightarrow m_0 \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M_0 \int_a^b g(x)dx. \quad \int_a^b g(x)dx > 0$$

$$\Rightarrow m_0 \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M_0. \quad f \in \mathcal{C}([a, b]) \Rightarrow \text{T. Valores intermedios} \Rightarrow \exists \theta \in (a, b)$$

$$f(\theta) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}.$$

Fórmula de Simpson

$$x_0 = a, \quad x_1 = \frac{a+b}{2}, \quad x_2 = b \quad \text{Cap 1} \quad \text{①}$$

$$x_i = x_0 + i h, \quad i = 0, 1, 2.$$

$$h = \frac{b-a}{2}.$$

$$P_2(x) = f(x_0) + (x-x_0)f[x_0, x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0, x_1, x_2]$$

$$= f(x_0) + (x-x_0) \frac{\Delta f(x_0)}{h} + (x-x_0)(x-x_1) \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2h^2} =$$

$$= f(x_0) + (x-x_0) \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + (x-x_0)(x-x_1) \frac{f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)}{2h^2}$$

$$\int_a^b P_2(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 3 \quad x \in [0, 3]$$

Error $R(f) = \int_a^b (f(x) - P_2(x)) dx = \int_a^b f(x) - \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] -$

$$\int_a^b \frac{f'''(\xi_x)}{3!} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \rightarrow \text{cambia de signo}$$

Sea $\psi: [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\psi(r) = \int_{x_1-r}^{x_1+r} f(x) dx - \frac{r}{3} [f(x_1-r) + f(x_1) + f(x_1+r)]$$

$$R(a, b) = \psi(h) \quad \text{si } f \in \mathcal{C}^4$$

$$\psi'(r) = \psi''(r), \quad \psi'''(r) = -\frac{r}{3} [f'''(x_1+r) - f'''(x_1-r)]$$

$$\psi(0) = \psi'(0) = \psi''(0) = \psi'''(0) = 0$$

T. valor medio $r \in [0, h] \quad \exists \xi_r \in [x_1-r, x_1+r]$

$$\psi'''(r) = -\frac{2r^2}{3} f^{(4)}(\xi_r)$$

Integramos

$$\psi''(r) = -\frac{2}{3} \int_0^r f^{(iv)}(\xi_s) s^2 ds + \psi''(0) = -\frac{2}{3} \int_0^r f^{(iv)}(\xi_s) s^2 ds$$

$$= -\frac{2}{3} f^{(iv)}(\eta_r) \int_0^r s^2 ds = -\frac{2}{9} f^{(iv)}(\eta_r) r^3$$

$$\psi'(r) = -\frac{2}{9} \int_0^r f^{(iv)}(\eta_s) s^3 ds + \psi'(0) = -\frac{1}{18} f^{(iv)}(\theta_r) r^4$$

$$\psi(r) = -\frac{1}{180} f^{(iv)}(\theta_r) \cdot r^5$$

$$\theta_r \in (a, b)$$

$$R(a, b)(f) = \psi(h) = -\frac{1}{90} f^{(iv)}(\theta_h) \cdot h^5$$

Simpson abierta  $h = \frac{b-a}{4}$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{4h}{3} [2f(x_0) - f(x_1) + 2f(x_2)]$$

$$R(a, b)(f) = \frac{14h^5}{45} f^{(iv)}(\theta)$$

Tres octavos $x_i = a + ih$ $h = \frac{b-a}{3}$ 4 puntos

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

$$R(a, b)(f) = -\frac{3h^5}{80} f^{(iv)}(\theta)$$

→ Curvedas $h = \frac{b-a}{n}$ $x_0 = a$

Abiertas $h = \frac{b-a}{n+2}$ $x_0 = a+h$

[I] Sea $n = 2k$ ($n = 2k+1$). y $f \in C^{2k+2}$. El error en Newton-Cotes con $n+1$ puntos $f^{(2k+2)}(\theta) h^{2k+3}$

$$R(a, b)(f) = \frac{C}{(2k+2)!}$$

$\theta \in (a, b)$, C independiente de f.

$$R_{(a,b)}(f) = \int_a^b [f(x)]^2 dx - \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$$

$$\psi: [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\psi(r) = \int_{x_1-r}^{x_1+r} f(x) dx - \frac{r}{3} [f(x_1-r) + 4f(x_1) + f(x_1+r)]$$

$$R_{(a,b)}(f) = \psi(h)$$

$$f \in \mathcal{C}^4 \Rightarrow \psi \in \mathcal{C}^4$$

$$\begin{aligned} \psi'(r) &= f(x_1+r) + f(x_1-r) - \frac{1}{3} [f(x_1-r) + 4f(x_1) + f(x_1+r)] \\ &\quad + f(x_1+r) - \frac{r}{3} [f'(x_1+r) - f'(x_1-r)] \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3} [f(x_1-r) - 2f(x_1) + f(x_1+r)] + \frac{r}{3} [f'(x_1-r) - f'(x_1+r)]$$

$$\psi''(r) = \frac{2}{3} [f'(x_1+r) - f'(x_1-r)] + \frac{1}{3} [f'(x_1-r) - f'(x_1+r)]$$

$$+ \frac{r}{3} [-f''(x_1-r) - f''(x_1+r)]$$

$$= \frac{1}{3} [f'(x_1+r) - f'(x_1-r)] - \frac{r}{3} [f''(x_1-r) + f''(x_1+r)]$$

$$\psi'''(r) = \frac{1}{3} [f''(x_1+r) + f''(x_1-r)] - \frac{1}{3} [f''(x_1-r) + f''(x_1+r)]$$

$$- \frac{r}{3} [-f'''(x_1-r) + f'''(x_1+r)]$$

$$= - \frac{r}{3} [f'''(x_1+r) - f'''(x_1-r)]$$

$$\psi(0) = \psi'(0) = \psi''(0) = \psi'''(0) = 0.$$

$$\psi \in \mathcal{C}^4 \stackrel{\text{T.V.M}}{\Rightarrow} \exists \xi_r \in (x_1 - r, x_1 + r)$$

$$\begin{aligned} \psi'''(r) &= -\frac{r}{3} [\varphi'''(x_1 + r) - \varphi'''(x_1 - r)] = \\ &= -\frac{2r^2}{3} \varphi^{(IV)}(\xi_r). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \psi''(r) = -\frac{2}{3} \int_0^r \varphi^{(IV)}(\xi_s) s^2 ds + \psi''(0)$$

$$= -\frac{2}{3} \int_0^r \varphi^{(IV)}(\xi_s) s^2 ds = -\frac{2}{9} \varphi^{(IV)}(\eta_r) r^3$$

$$\psi'(r) = -\frac{2}{9} \int_0^r \varphi^{(IV)}(\eta_s) s^3 ds + \psi'(0)$$

$$= -\frac{1}{18} \varphi^{(IV)}(\vartheta_r) r^4$$

$$\psi(r) = -\frac{1}{18} \int_0^r \varphi^{(IV)}(\vartheta_s) s^4 ds + \psi(0) =$$

$$= -\frac{1}{90} \varphi^{(IV)}(\theta_r) r^5$$

$$\Rightarrow R_{(a,b)}(\varphi) = \psi(h) = -\frac{1}{90} \varphi^{(IV)}(\theta_h) h^5$$

Fórmulas compuestas

Trapezios

①

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$

$$R(a,b)(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\theta)$$

Dividimos $[a,b]$ en m subintervalos de longitud $h = \frac{b-a}{m}$. Los puntos $x_i = a + ih$ $i=0, \dots, m$.

Aplicando trapezios en cada subintervalo

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \frac{x_i - x_{i-1}}{2} [f(x_i) + f(x_{i-1})] - \frac{h^3}{12} f''(\theta_i)$$
$$= \frac{h}{2} [f(x_i) + f(x_{i-1})] - \frac{h^3}{12} f''(\theta_i)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^m [f(x_i) + f(x_{i-1})] - \frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^m f''(\theta_i) =$$
$$= \frac{h}{2} [f(a) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + f(b)] - \frac{(b-a)^3}{12m^2} \sum_{i=1}^m f''(\theta_i)$$

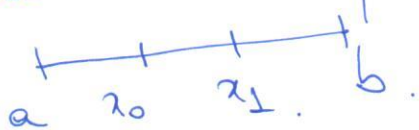
$f \in C^2([a,b]) \Rightarrow f''$ es continua en $[a,b]$

$$\Rightarrow \exists \theta \in [a,b] \quad \sum_{i=1}^m \frac{f''(\theta_i)}{m} = f''(\theta)$$

$$R(a,b)(f) = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} f''(\theta) = -(b-a) \frac{h^2}{12} f''(\theta)$$

Trapezios abierta compuesta

$$x_1 - x_0 = \frac{b-a}{3}$$



Sea $h = \frac{b-a}{3m}$ $x_i = a + ih$ $i=1, \dots, 3m-1$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^m \int_{x_{3(i-1)}}^{x_{3i}} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^m \left[\frac{3h}{2} (f(x_{3i-2}) + f(x_{3i-1})) \right]$$
$$= \frac{3h}{2} \left[\sum_{i=1}^m f(x_{3i-2}) + \sum_{i=1}^m f(x_{3i-1}) \right]$$

Otra estimación del error

$$R_n(f) = -\frac{h^3}{12} \sum_{j=1}^n f''(\xi_j) = -\frac{h^3 n}{12} \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f''(\eta_j) \right]$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n(f)}{h^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{b-a}{12n} \sum_{j=1}^n f''(\eta_j) \right] =$$
$$= -\frac{1}{12} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f''(\eta_j) \cdot h = -\frac{1}{12} \int_a^b f''(x) dx =$$

$$= -\frac{1}{12} [f'(b) - f'(a)]$$

$$R_n(f) \approx -\frac{h^2}{12} [f'(b) - f'(a)] \equiv \tilde{R}_n(f)$$

estimación asintótica del resto.

Def $R_n(f)$ error exacto, $\tilde{R}_n(f)$ estimación del error
 $\tilde{R}_n(f)$ es una estimación asintótica de $R_n(f)$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{R}_n(f)}{R_n(f)} = 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{R}_n(f) - R_n(f)}{R_n(f)} = 0.$$

Simpson compuesta $f \in \mathcal{C}^4([a, b])$ $h = \frac{b-a}{2m}$, $m \in \mathbb{N}$
 $2m+1$ puntos $[a, a+2h]$
 $x_i = a + ih$ $i = 0, \dots, 2m$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left[f(a) + 4 \sum_{i=1}^m f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + f(b) \right]$$

$$R_{(a,b)}(f) = - (b-a) \frac{h^4}{180} f^{(4)}(\theta).$$

$$[x_{2(i-1)}, x_{2i}] \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$S = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4 \sum_{i=1}^m f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + f(b) \right]$$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^m \int_{x_{2(i-1)}}^{x_{2i}} f(x) dx = \frac{h}{3} \sum_{i=1}^m \left[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i}) \right] - \frac{h^5}{90} \sum_{i=1}^m f^{(4)}(\theta_i) = S - \frac{b-a}{m} \frac{h^4}{180} \sum_{i=1}^m f^{(4)}(\theta_i)$$

$$= S - (b-a) \frac{h^4}{180} f^{(4)}(\theta)$$

Abierta $4m+1$ puntos $\{a, a+h, \dots, a+4mh\}$
 $[a, a+4h]$ $h = \frac{b-a}{4m}$

$$f \in \mathcal{C}^4([a, b]) \quad x_i = a + ih$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{4h}{3} \left[2 \sum_{i=1}^m f(x_{4i-3}) - \sum_{i=1}^m f(x_{4i-2}) + 2 \sum_{i=1}^m f(x_{4i-1}) \right]$$

$$R_{(a,b)}(f) = (b-a) \frac{7h^4}{90} f^{(4)}(\theta).$$

$$[x_{4(i-1)}, x_{4i}]$$

$$R_m(f) = I(f) - I_m(f) = -\frac{b-a}{m} \frac{h^4}{180} \sum_{i=1}^m f^{(4)}(\theta_i)$$

Error analitico

$$R_m(f) \approx -\frac{h^4}{180} [f'''(b) - f'''(a)] = \tilde{R}_m(f)$$

mm

Si se conoce f en $4m+1$ puntos $\{a, a+h, \dots, a+4mh\}$
 y aplicamos Simpson abierta $[a, a+4h], [a+4h, a+8h], \dots$
 $[a+4(m-1)h, a+4mh]$

Simpson abierta compuesta $f \in C^4([a, b])$, $h = \frac{b-a}{4m}$, $m \in \mathbb{N}$

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, 4m$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{4h}{3} \left(2 \sum_{i=1}^m f(x_{4i-3}) - \sum_{i=1}^m f(x_{4i-2}) + 2 \sum_{i=1}^m f(x_{4i-1}) \right)$$

$$R_{(a,b)}(f) = (b-a) \frac{h^4}{90} f^{(4)}(\theta)$$

Seu m intervalos $[x_{4(i-1)}, x_{4i}]$, $i = 1, 2, \dots, m$

Aplicamos Simpson abierta

$$\int_{-1001}^{1001} |x \cos \pi x|^3 dx, \quad h = \frac{2002}{n}$$

Simpson curvada compuesta
 $n=1001$ puntos.

$$h = \frac{b-a}{2m} = \frac{2002}{2 \cdot 1001} = 1, \quad x_i = -1001 + ih, \quad i=0, 2002$$

$$[-1001, -999], [-999, -997], \dots, [-3, -1], [-1, 1], [1, 3], \dots, [999, 1001]$$

$$f(x) = |x \cos \pi x|^3, \quad \cos k\pi = (-1)^k$$

$$f(k) = |k \cos k\pi|^3, \quad k = \pm 1001, \pm 999, \dots, \pm 1, 0.$$

$$-1001, -1000, -999, \dots, -3, -2, -1.$$

$$P(x) = -x^3, \quad P(x) = x^3$$

es exacta para pol. de gr. ≤ 3 .

$$\int_{-1001}^{1001} |x \cos \pi x|^3 dx \approx -\int_{-1001}^{-1} x^3 dx + \int_{-1}^{1001} x^3 dx + \int_{-1}^1 |x|^3 dx$$

$$= -\int_{-1001}^{-1} x^3 dx + \int_{-1}^{1001} x^3 dx + 2 \int_0^1 x^3 dx$$

2000 $n+1$ puntos. $h = \frac{b-a}{n}, x_0 = a, n=1000, \boxed{h=1}$.

$$\int_{-1000}^{1000} [-1000, -998], [-998, -996], \dots, [-2, 0], [0, 2], \dots$$

$$f(k) = |k|^3, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 1000$$

$$P(x) = -x^3, \quad P(x) = x^3$$

$$\int_{-1000}^{1000} dx \approx -\int_{-1000}^0 x^3 dx + \int_0^{1000} x^3 dx = -\frac{x^4}{4} \Big|_{-1000}^0 + \frac{x^4}{4} \Big|_0^{1000}$$