

Fórmulas

Miguel González Cuadrado

19 de noviembre de 2009

Sin garantía. Estas páginas contienen errores, en las fórmulas y en el texto.

$$2 + 2 = 5$$

Índice

1. Trigonometría	3
2. Funciones hiperbólicas	4
3. Cálculo diferencial	5
3.1. Derivadas	5
3.2. Primitivas	6
4. Cálculo vectorial	7
4.1. Producto escalar	7
4.2. Producto vectorial	7
4.3. Producto mixto	7
4.4. Doble producto vectorial	7
5. Cinemática	8
5.1. Cinemática del sólido	8
5.2. Composición de movimientos	8
6. Dinámica	9
6.1. Ecuaciones generales	9
6.2. Dinámica del sólido rígido	10
6.2.1. Dinámica del sólido rígido libre	10
7. Transformaciones y sistemas de referencia	11
7.1. Representación de giros por medio de cuaterniones	11
8. Mecánica de vuelo	12
8.1. Sistemas de referencia	12
8.1.1. Ángulos de Euler y matrices de giro	12
8.1.2. Sistemas horizonte local, cuerpo y viento	13
8.1.3. Ángulos de Euler para cambios entre sistemas de referencia	13
8.1.4. Ángulos de Euler y velocidad angular	13

9. Motores de turbina	14
9.1. Fórmulas generales	14
9.2. Anatomía de un motor de turbina	15
9.3. Estudio por elementos	15
9.3.1. Infinito (0 y 9)	15
9.3.2. Del infinito a la entrada ($0 \rightarrow 1$)	15
9.3.3. Entrada ($1 \rightarrow 2$)	15
9.3.4. Compresor ($2 \rightarrow 3$)	15
9.3.5. Cámara de combustión ($3 \rightarrow 4$)	15
9.3.6. Turbina ($4 \rightarrow 5$)	16
9.3.7. Salida ($5 \rightarrow 8$)	16
10.Laplace	17
10.1. Definiciones	17
10.2. Propiedades	17
10.3. Tablas de transformadas	18
11.Análisis dimensional	20
11.1. Tabla de dimensiones	21
11.2. Tabla de parámetros adimensionales	22

1. Trigonometría

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

$$\cot(-x) = -\cot x$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin b \sin a$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin 2a = \frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a}$$

$$\cos 2a = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\sin^2 a = \frac{1}{2} (1 - \cos 2a)$$

$$\cos^2 a = \frac{1}{2} (1 + \cos 2a)$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

Moivre:

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

$$(\cos x - i \sin x)^n = \cos nx - i \sin nx$$

Euler:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

2. Funciones hiperbólicas

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x$$

$$\cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh nx + \sinh nx$$

$$(\cosh x - \sinh x)^n = \cosh nx - \sinh nx$$

$$\cosh(-x) = \cosh x$$

$$\sinh(-x) = -\sinh x$$

$$\tanh(-x) = -\tanh x$$

$$\coth(-x) = -\coth x$$

$$\cosh(a + b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$$

$$\sinh(a + b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b$$

$$\tanh(a + b) = \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b}$$

$$\sinh 2a = 2 \sinh a \cosh a$$

$$\cosh 2a = \cosh^2 a + \sinh^2 a = 2 \cosh^2 a - 1 = 1 + 2 \sinh^2 a$$

$$\sinh 2a = \frac{2 \tanh a}{1 - \tanh^2 a}$$

$$\cosh 2a = \frac{1 + \tanh^2 a}{1 - \tanh^2 a}$$

$$\tanh 2a = \frac{2 \tanh a}{1 + \tanh^2 a}$$

$$\operatorname{argsinh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{argcosh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \quad x > 1$$

$$\operatorname{argtanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad -1 < x < +1$$

3. Cálculo diferencial

3.1. Derivadas

y	y'	y	y'
$x^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R}^*)$	nx^{n-1}	e^{mx}	me^{mx}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	a^x	$a^x \ln a$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\sin x$	$\cos x$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{argcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{argsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{argtanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \qquad \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$ $\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x \qquad \frac{1}{\sinh^2 x} = -1 + \coth^2 x$			

3.2. Primitivas

$f(x)$	$\int f(x) dx$	$f(x)$	$\int f(x) dx$
$x^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\frac{1}{1+\cos x}$	$\tan \frac{x}{2}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$\frac{1}{1-\cos x}$	$\cot \frac{x}{2}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	e^{mx}	$\frac{1}{m}e^{mx}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$\ln x$	$x \ln x - x$
$\cos x$	$\sin x$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\cos(\omega x + \phi)$	$\frac{1}{\omega} \sin(\omega x + \phi)$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\sin x$	$-\cos x$	$\tanh x$	$\ln(\cosh x)$
$\sin(\omega x + \phi)$	$-\frac{1}{\omega} \cos(\omega x + \phi)$	$\coth x$	$\ln \sinh x $
$\tan x$	$-\ln \cos x $	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\tanh x$
$\cot x$	$\ln \sin x $	$\frac{1}{\sinh^2 x}$	$-\coth x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\frac{1}{\sinh x}$	$\ln \left \tanh \frac{x}{2} \right $
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$	$\frac{1}{\cosh x}$	$2 \arctan(e^x)$
$\frac{1}{\cos x}$	$\ln \left \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right $	$\frac{1}{1+\cosh x}$	$\tanh \frac{x}{2}$
$\frac{1}{\sin x}$	$\ln \left \tan \frac{\pi}{2} \right $	$\frac{1}{1-\cosh x}$	$\coth \frac{x}{2}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos^2 x} &= 1 + \tan^2 x & \frac{1}{\sin^2 x} &= 1 + \cot^2 x \\
\frac{1}{\cosh^2 x} &= 1 - \tanh^2 x & \frac{1}{\sinh^2 x} &= -1 + \coth^2 x \\
2 \arctan(e^x) &= 2 \arctan \left(\tanh \frac{x}{2} \right) & &= \arctan(\sinh x)
\end{aligned}$$

4. Cálculo vectorial

Bases ortonormales.

4.1. Producto escalar

Definición:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}\mathbf{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Propiedades:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \\ \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} &\geq 0\end{aligned}$$

4.2. Producto vectorial

Definición:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \times \mathbf{a} &= \mathbf{o}\end{aligned}$$

4.3. Producto mixto

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} &= \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \\ &= \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b} \\ &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a}\end{aligned}$$

4.4. Doble producto vectorial

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a}\end{aligned}$$

5. Cinemática

5.1. Cinemática del sólido

El sistema de ejes (O, x, y, z) va ligado al sólido; O es un punto del sólido. El sistema de ejes absoluto es (O_1, x_1, y_1, z_1) . La velocidad angular del sólido es $\boldsymbol{\omega}$, y su aceleración angular es $\boldsymbol{\alpha}$.

$$\begin{aligned} \text{posición:} \quad \overrightarrow{O_1 P} &= \overrightarrow{O_1 O} + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ \text{velocidad:} \quad \mathbf{v}^P &= \mathbf{v}^O + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP} \\ \text{aceleración:} \quad \mathbf{a}^P &= \mathbf{a}^O + \boldsymbol{\alpha} \times \overrightarrow{OP} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP}) \\ &= \mathbf{a}^O + \boldsymbol{\alpha} \times \overrightarrow{OP} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \overrightarrow{OP})\boldsymbol{\omega} - \omega^2 \overrightarrow{OP} \end{aligned}$$

La aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ se puede obtener como derivada de $\boldsymbol{\omega}$ en ejes absolutos o relativos indistintamente:

$$\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_1 = \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_0$$

5.2. Composición de movimientos

Sean los sistemas de referencia $S_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$ (absoluto), $S_0(O, x, y, z)$ (relativo) y $S_2(O_2, x_2, y_2, z_2)$. Se estudia el movimiento de S_2 respecto a S_0 , expresado en el sistema de referencia S_1 .

Derivación de un vector:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{q}}{dt}\right)_1 &= \left(\frac{d\mathbf{q}}{dt}\right)_0 + \boldsymbol{\omega}_{01} \times \mathbf{q} \\ \left(\frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2}\right)_1 &= \left(\frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2}\right)_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{01} \times \mathbf{q} + \boldsymbol{\omega}_{01} \times (\boldsymbol{\omega}_{01} \times \mathbf{q}) + 2\boldsymbol{\omega}_{01} \times \left(\frac{d\mathbf{q}}{dt}\right)_0 \end{aligned}$$

Composición de velocidades:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{21}^M &= \mathbf{v}_{01}^O + \mathbf{v}_{20}^M + \boldsymbol{\omega}_{01} \times \overrightarrow{OM} \\ &= \mathbf{v}_{20}^M + \mathbf{v}_{01}^M \\ \boldsymbol{\omega}_{21} &= \boldsymbol{\omega}_{20} + \boldsymbol{\omega}_{01} \end{aligned}$$

Composición de aceleraciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{21}^M &= \mathbf{a}_{01}^O + \mathbf{a}_{20}^M + \boldsymbol{\alpha}_{01} \times \overrightarrow{OM} + \boldsymbol{\omega}_{01} \times (\boldsymbol{\omega}_{01} \times \overrightarrow{OM}) + 2\boldsymbol{\omega}_{01} \times \mathbf{v}_{20}^M \\ &= \mathbf{a}_{20}^M + \mathbf{a}_{01}^M + 2\boldsymbol{\omega}_{01} \times \mathbf{v}_{20}^M \\ \boldsymbol{\alpha}_{21} &= \boldsymbol{\alpha}_{20} + \boldsymbol{\alpha}_{01} + \boldsymbol{\omega}_{01} \times \boldsymbol{\omega}_{20} \end{aligned}$$

6. Dinámica

6.1. Ecuaciones generales

Sobre una partícula:

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_e = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

donde $\mathbf{F}_i$ y $\mathbf{F}_e$ son las fuerzas internas y externas respectivamente que actúan sobre la partícula.

Sean $S_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$ un sistema de referencia galileano, $S(O, x, y, z)$ un sistema de ejes *paralelos* a los de S_1 , y S_2 un sistema de partículas. Se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} \text{cantidad de movimiento} & \sum_i \mathbf{F}_{e_i} = m\mathbf{a}_{21}^G \\ \text{momento cinético} & \sum_i \overrightarrow{OM_i} \times \mathbf{F}_{e_i} = \frac{d\mathbf{H}_O}{dt} + m\mathbf{v}_{01}^O \times \mathbf{v}_{21}^G \end{array}$$

donde

- $m = \sum_i m_i$ es la masa total del sistema de partículas
- G es el centro de masas del sistema de partículas ($m\overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}$)
- $\mathbf{H}_O = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \times m\mathbf{v}_{21}^{M_i}$ es el momento cinético absoluto del sistema de partículas respecto del punto O

En la ecuación del momento cinético, el último término $m\mathbf{v}_{01}^O \times \mathbf{v}_{21}^G$ se anula si O es fijo ($\mathbf{v}_{01}^O = \mathbf{o}$), o si O coincide en todo momento con G ($O \equiv G$), o si las velocidades de O y G son paralelas en todo momento.

6.2. Dinámica del sólido rígido

Para un sólido rígido S_2 , el momento cinético relativo respecto del punto O es

$$\mathbf{h}_O = \mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega}_{20}$$

donde $\mathbf{I}_O$ es el tensor de inercia del sólido respecto del punto O , luego el momento cinético absoluto respecto del punto O es

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{h}_O + m \overrightarrow{OG} \times \mathbf{v}_{01}^O = \mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega}_{20} + m \overrightarrow{OG} \times \mathbf{v}_{01}^O$$

6.2.1. Dinámica del sólido rígido libre

Para el sólido rígido libre se toma $O \equiv G$. Si $\mathbf{r}_i$ es el vector $\overrightarrow{OM_i} = \overrightarrow{GM_i}$ para cada punto M_i del sólido, $\mathbf{I}_G$ es el tensor de inercia del sólido respecto del punto G , y $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular del sólido respecto de ejes absolutos, las ecuaciones del movimiento son

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{F}_{e_i} &= m \mathbf{a}^G \\ \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{e_i} &= \frac{d}{dt} (\mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega}) \end{aligned}$$

Si se expresa la velocidad absoluta de G en ejes relativos ligados al sólido como $\mathbf{v}_{\text{ref}}^G$, y se desarrolla la derivada de la segunda ecuación en ejes relativos para que sea $\frac{d}{dt} \mathbf{I}_G = \mathbf{0}$, queda

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{F}_{e_i} &= m \left(\frac{\partial \mathbf{v}_{\text{rel}}^G}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}}^G \right) \\ \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{e_i} &= \mathbf{I}_G \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega}) \end{aligned}$$

El tensor de inercia es

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -J_{xy} & -J_{zx} \\ -J_{xy} & I_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{yy} + J_{zz} & -J_{xy} & -J_{zx} \\ -J_{xy} & J_{zz} + J_{xx} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{yz} & J_{xx} + J_{yy} \end{pmatrix}$$

donde

$$J_{\alpha\beta} = \int \alpha\beta \, dm$$

7. Transformaciones y sistemas de referencia

7.1. Representación de giros por medio de cuaterniones

Definición de cuaternión:

$$\tilde{q} = \{\mu, \xi, \eta, \zeta\} = \mu + \xi i + \eta j + \zeta k$$

donde i, j y k son unidades imaginarias independientes tales que $ijk = -1$.

Los cuaterniones que representan giros tienen norma unidad: $\mu^2 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$. El cuaternión que representa un giro de ángulo θ alrededor del vector unitario $\mathbf{u} = (a, b, c)$ es

$$\begin{aligned}\tilde{q}(\mathbf{u}, \theta) &= \left\{ \cos \frac{\theta}{2}, a \sin \frac{\theta}{2}, b \sin \frac{\theta}{2}, c \sin \frac{\theta}{2} \right\} \\ &= \left\{ \cos \frac{\theta}{2}, \mathbf{u} \sin \frac{\theta}{2} \right\}\end{aligned}$$

Un vector $\mathbf{v}$ rotado por un cuaternión $\tilde{q}$ es $\tilde{q} \cdot \mathbf{v} \cdot \tilde{q}^{-1}$, donde para las operaciones con cuaterniones se pone $\mathbf{v}$ como $\{0, \mathbf{v}\}$. Si se rota este vector ya rotado por otro cuaternión $\tilde{p}$ se obtiene $\tilde{p} \cdot \tilde{q} \cdot \mathbf{v} \cdot \tilde{q}^{-1} \cdot \tilde{p}^{-1}$, por lo que el giro de $\tilde{q}$ seguido del giro de $\tilde{p}$ corresponde al cuaternión $\tilde{p} \cdot \tilde{q}$, *siempre que ambos giros se expresen en los ejes originales sin girar*. Si el segundo giro $\tilde{p}$ se expresa en los ejes girados (es decir, los ejes originales girados por $\tilde{q}$), el cuaternión resultante es $\tilde{q} \cdot \tilde{p}$.

La matriz de giro que representa el mismo giro que un cuaternión $\tilde{q} = \{\mu, \xi, \eta, \zeta\}$ es

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mu^2 + \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2 & 2(\xi\eta - \mu\zeta) & 2(\xi\zeta + \mu\eta) \\ 2(\xi\eta + \mu\zeta) & \mu^2 - \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 & 2(\eta\zeta - \mu\xi) \\ 2(\xi\zeta - \mu\eta) & 2(\eta\zeta + \mu\xi) & \mu^2 - \xi^2 - \eta^2 + \zeta^2 \end{pmatrix}$$

8. Mecánica de vuelo

8.1. Sistemas de referencia

8.1.1. Ángulos de Euler y matrices de giro

Los ángulos de Euler (ψ, θ, ϕ) definen tres rotaciones sucesivas que convierten un sistema de referencia en otro. Las rotaciones son sucesivamente:

1. rotación ψ (guiñada) alrededor del eje z original
2. rotación θ (asiento) alrededor del eje y *girado*
3. rotación ϕ (balance) alrededor del eje x *girado*

o bien, aplicando las rotaciones alrededor de los ejes originales:

1. rotación ϕ (balance) alrededor del eje x original
2. rotación θ (asiento) alrededor del eje y *original* (sin girar)
3. rotación ψ (guiñada) alrededor del eje z *original* (sin girar)

La transformación inversa se obtiene por medio de las siguientes rotaciones:

1. rotación $-\phi$ alrededor del eje x original
2. rotación $-\theta$ alrededor del eje y *girado*
3. rotación $-\psi$ alrededor del eje z *girado*

La matriz $({}_a\mathbf{L}_b)$ transforma el sistema de referencia a en el b ; esto es

$$\begin{aligned}\mathbf{i}_b &= ({}_a\mathbf{L}_b) \mathbf{i}_a \\ \mathbf{j}_b &= ({}_a\mathbf{L}_b) \mathbf{j}_a \\ \mathbf{k}_b &= ({}_a\mathbf{L}_b) \mathbf{k}_a\end{aligned}$$

Se pueden convertir coordenadas de un sistema a otro por medio de

$$\mathbf{v}^a = ({}_a\mathbf{L}_b) \mathbf{v}^b$$

donde $\mathbf{v}^a$ son las coordenadas del vector $\mathbf{v}$ en el sistema de referencia a , y $\mathbf{v}^b$ son las coordenadas del mismo vector $\mathbf{v}$ en el sistema de referencia b .

La matriz $({}_a\mathbf{L}_b)$ que representa el giro de a a b definido por los ángulos de Euler (ψ, θ, ϕ) , y que convierte coordenadas en el sistema de referencia b al sistema de referencia a , es

$$({}_a\mathbf{L}_b) = (\mathbf{L}_\psi) (\mathbf{L}_\theta) (\mathbf{L}_\phi)$$

$$\begin{aligned}&= \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \\ -\sin \theta & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

8.1.2. Sistemas horizonte local, cuerpo y viento

- horizonte local (h): x_h e y_h horizontales, en la posición del avión, z_h hacia abajo
- cuerpo (b): x_b y z_b en el plano de simetría del avión, x_b hacia delante, z_b hacia abajo (en el avión), y_b hacia la derecha
- viento (w): x_w según la velocidad aerodinámica, z_w en el plano de simetría del avión y perpendicular a x_w hacia abajo (en el avión), y_w formando triedro a derechas

8.1.3. Ángulos de Euler para cambios entre sistemas de referencia

matriz	ángulos de Euler (ψ, θ, ϕ)		
$({}_h\mathbf{L}_b)$	$\psi \in [-\pi, +\pi]$	$\theta \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$	$\phi \in [-\pi, +\pi]$
$({}_h\mathbf{L}_w)$	$\chi \in [-\pi, +\pi]$	$\gamma \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$	$\mu \in [-\pi, +\pi]$
$({}_w\mathbf{L}_b)$	$-\beta \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$	$\alpha \in [-\pi, +\pi]$	0

La transformación correspondiente a $({}_b\mathbf{L}_w)$ se obtiene como inversa de la $({}_w\mathbf{L}_b)$, es decir como una rotación $-\alpha$ alrededor del eje y seguida de una rotación β alrededor del eje z girado. Esto asegura que el eje z_w se quede en el plano (x_b, z_b) .

8.1.4. Ángulos de Euler y velocidad angular

Sean $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$ la velocidad angular del sistema de referencia cuerpo respecto del sistema de referencia horizonte local, expresada en ejes cuerpo, y (ψ, θ, ϕ) los ángulos de Euler de $({}_h\mathbf{L}_b)$. Se pueden relacionar (p, q, r) y (ψ, θ, ϕ) por medio de:

$$\begin{aligned}
 p &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta & \dot{\phi} &= p + (q \sin \phi + r \cos \phi) \tan \theta \\
 q &= \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi & \dot{\theta} &= q \cos \phi - r \sin \phi \\
 r &= \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi & \dot{\psi} &= \frac{1}{\cos \theta} (q \sin \phi + r \cos \phi)
 \end{aligned}$$

9. Motores de turbina

9.1. Fórmulas generales

El subíndice “t” significa “total” o “de remanso”.

La entalpía es

$$h = c_p T$$

donde T es la temperatura, y c_p es la capacidad de calor (—FIXME— ¿cómo se llama c_p de verdad?—). La entalpía total es

$$h_t = h + \frac{V^2}{2}$$

donde V es la velocidad del fluido.

En un proceso isentrópico, se mantiene la cantidad

$$\frac{(p_t)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{T_t}$$

donde p es la presión. O sea, si un proceso isentrópico transforma el estado α en β ,

$$\left(\frac{p_{\beta t}}{p_{\alpha t}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{T_{\beta t}}{T_{\alpha t}}$$

Las eficiencias η de elementos que inyectan o extraen trabajo mecánico en el aire se miden como el cociente entre el incremento de entalpía total real y el que habría conseguido la misma relación de presiones totales, o al revés, de manera que salga $\eta < 1$ en general. O sea, para compresores,

$$\eta_{\text{comp}} = \frac{\left(\frac{p_{\beta t}}{p_{\alpha t}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}{\frac{T_{\beta t}}{T_{\alpha t}} - 1}$$

y para turbinas,

$$\eta_{\text{turb}} = \frac{\frac{T_{\beta t}}{T_{\alpha t}} - 1}{\left(\frac{p_{\beta t}}{p_{\alpha t}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}$$

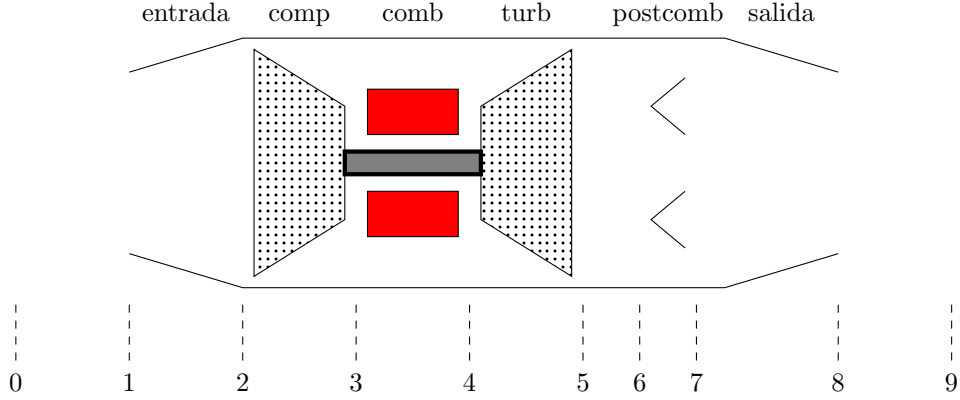
En otros elementos se definen las eficiencias como un factor sobre la magnitud útil obtenida o sobre un cociente que idealmente debería valer 1 pero en realidad es menor que 1.

La potencia en elementos que inyectan o extraen energía es (—FIXME— verificar fórmula; dudo de la coherencia dimensional—)

En un proceso que transforma el estado α en β , la relación de compresión es (—FIXME— corregir el símbolo —)

$$\nu_{\alpha\beta} = \frac{p_{\beta t}}{p_{\alpha t}}$$

9.2. Anatomía de un motor de turbina



9.3. Estudio por elementos

9.3.1. Infinito (0 y 9)

$$T_0 = T_9 \quad p_0 = p_9$$

9.3.2. Del infinito a la entrada (0 → 1)

$$\frac{T_{1t}}{T_{0t}} = 1 \quad \frac{p_{1t}}{p_{0t}} = 1$$

9.3.3. Entrada (1 → 2)

$$\frac{T_{2t}}{T_{1t}} = 1 \quad \frac{p_{2t}}{p_{1t}} = \eta_{12} \leq 1$$

9.3.4. Compresor (2 → 3)

$$\frac{p_{3t}}{p_{2t}} = \nu_{23} > 1 \quad \frac{\left(\frac{p_{3t}}{p_{2t}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}{\frac{T_{3t}}{T_{2t}} - 1} = \eta_{23} \leq 1 \quad W_{\text{comp}} = -c_p (T_{3t} - T_{2t})$$

9.3.5. Cámara de combustión (3 → 4)

$$\frac{p_{4t}}{p_{3t}} = \nu_{34} \leq 1 \quad c_p T_{4t} = c_p T_{3t} + W_{\text{comb}}$$

9.3.6. Turbina ($4 \rightarrow 5$)

$$\frac{p_{5t}}{p_{4t}} = \nu_{45} < 1 \quad \frac{\frac{T_{5t}}{T_{4t}} - 1}{\left(\frac{p_{5t}}{p_{4t}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1} = \eta_{45} \leq 1 \quad W_{\text{turb}} = -c_p (T_{5t} - T_{4t})$$

9.3.7. Salida ($5 \rightarrow 8$)

$$\frac{T_{8t}}{T_{5t}} = 1$$

Con salida subsónica o sónica (siempre es así a no ser que la tobera sea supersónica, o sea que se cierre y luego se abra),

$$p_8 = p_9 = p_0$$

10. Laplace

10.1. Definiciones

Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Transformada inversa:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

donde c es mayor que la parte real de todas las singularidades de $F(s)$.

10.2. Propiedades

	$F(s)$	$f(t)$
superposition	$\alpha F(s) + \beta G(s)$	$\alpha f(t) + \beta g(t)$
time delay ($\lambda > 0$)	$F(s)e^{-s\lambda}$	$f(t - \lambda)$
time scaling	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{s}{a}\right)$	$f(at)$
shift in frequency	$F(s + a)$	$e^{-at} f(t)$
differentiation	$sF(s) - f(0)$	$f'(t)$
integration	$\frac{1}{s} F(s)$	$\int f(\zeta) d\zeta$
convolution	$F(s)G(s)$	$\int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau$
time product	$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\zeta)G(s - \zeta) d\zeta$	$f(t)g(t)$
initial value	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$	$f(0^+)$
final value	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$	$f(+\infty)$
multiplication by time	$-\frac{d}{ds} F(s)$	$tf(t)$

10.3. Tablas de transformadas

$F(s)$	$f(t), t \geq 0$
1	$\delta(t)$
$\frac{1}{s}$	$1(t)$
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{2!}{s^3}$	t^2
$\frac{3!}{s^4}$	t^3
$\frac{m!}{s^{m+1}}$	t^m
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}
$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2!}t^2e^{-at}$
$\frac{1}{(s+a)^m}$	$\frac{1}{(m-1)!}t^{m-1}e^{-at}$
$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-at}$
$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$	$at - (1 - e^{-at})$

$F(s)$	$f(t), t \geq 0$
$\frac{(b-a)}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at} - e^{-bt}$
$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$
$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$1 - (1+at)e^{-at}$
$\frac{(b-a)s}{(s+a)(s+b)}$	$be^{-bt} - ae^{-at}$
$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\sin at$
$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos at$
$\frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$	$e^{-at} \sin bt$
$\frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$	$e^{-at} \cos bt$
$\frac{a^2 + b^2}{s((s+a)^2 + b^2)}$	$1 - e^{-at} \left(\cos bt + \frac{a}{b} \sin bt \right)$
$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{ab} + \frac{e^{-at}}{a(a-b)} + \frac{e^{-bt}}{b(b-a)}$

11. Análisis dimensional

Las dimensiones fundamentales son

$\mathcal{M}$	masa	(m)
$\mathcal{L}$	longitud	(kg)
$\mathcal{T}$	tiempo	(s)
θ	temperatura	(K)

Una relación de la forma

$$v_1 = f \{v_2, v_3, \dots, v_n\}$$

se convierte a la forma

$$\Pi_1 = f \{\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{n-r}\}$$

con r dependencias menos, por el siguiente procedimiento:

1. se prepara una lista de las dimensiones de las n variables físicas, como combinaciones de las dimensiones fundamentales $(\mathcal{M}, \mathcal{L}, \mathcal{T}, \theta)$; se determina el número d de dimensiones fundamentales que aparecen en la lista
2. se selecciona de entre las variables independientes $(v_2, \dots, v_n)$ un número r de variables que contengan las d dimensiones fundamentales pero que no puedan formar una magnitud adimensional por combinación; r se busca tan grande como sea posible, teniendo en cuenta que siempre es $r \leq d$ (generalmente se llega a $r = d$); supóngase que las variables independientes seleccionadas son $(v_{n-r+1}, \dots, v_n)$
3. para cada variable v_i de entre $(v_1, \dots, v_{n-r})$ se forma una magnitud adimensional Π_i multiplicando v_i por una combinación de las r variables independientes seleccionadas en el paso anterior
4. se puede poner la relación original como Π_1 en función de las $(v_2, \dots, v_n)$; como Π_1 es adimensional, también lo son la función y sus argumentos, así que queda Π_1 como función de las $(\Pi_2, \dots, \Pi_{n-r})$

La elección de las r variables independientes no es única (pero determina completamente las adimensionalizaciones posteriores), luego las variables adimensionalizadas $(\Pi_1, \dots, \Pi_{n-r})$ no son únicas. Se pueden sustituir las dependencias en las variables adimensionalizadas por dependencias en combinaciones entre ellas, siempre que los argumentos sigan siendo independientes entre sí. Por ejemplo, se puede sustituir una dependencia en (Π_1, Π_2) por una dependencia en $(\Pi_1 (\Pi_2)^2, \sqrt{\Pi_2})$.

Todas estas manipulaciones se simplifican utilizando álgebra lineal sobre los exponentes de cada dimensión fundamental en la expresión de las dimensiones de las variables.

11.1. Tabla de dimensiones

magnitud	dimensión	unidades
masa	$\mathcal{M}^1$	kg
longitud	$\mathcal{L}^1$	m
tiempo	$\mathcal{T}^1$	s
temperatura	θ^1	K
área	$\mathcal{M}^2$	m ²
volumen	$\mathcal{M}^3$	m ³
ángulo	1	rad
frecuencia	$\mathcal{T}^{-1}$	Hz
velocidad	$\mathcal{L}^1\mathcal{T}^{-1}$	m · s ⁻¹
aceleración	$\mathcal{L}^1\mathcal{T}^{-2}$	m · s ⁻²
velocidad angular	$\mathcal{T}^{-1}$	rad · s ⁻¹
aceleración angular	$\mathcal{T}^{-2}$	rad · s ⁻²
momento de inercia	$\mathcal{M}^1\mathcal{L}^2$	kg · m ²
densidad	$\mathcal{M}^1\mathcal{L}^{-3}$	kg · m ⁻³
presión	$\mathcal{M}^1\mathcal{L}^{-1}\mathcal{T}^{-2}$	Pa
gasto másico	$\mathcal{M}^1\mathcal{T}^{-1}$	kg · s ⁻¹
gasto volumétrico	$\mathcal{L}^3\mathcal{T}^{-1}$	m ³ · s ⁻¹
fuerza	$\mathcal{M}^1\mathcal{L}^1\mathcal{T}^{-2}$	N
momento	$\mathcal{M}^1\mathcal{L}^2\mathcal{T}^{-2}$	N · m
trabajo	$\mathcal{M}^1\mathcal{L}^2\mathcal{T}^{-2}$	N · m
potencia	$\mathcal{M}^1\mathcal{L}^2\mathcal{T}^{-3}$	W

11.2. Tabla de parámetros adimensionales

nombre	símbolo	definición	fórmula
Mach	M	$\frac{\text{velocidad del flujo}}{\text{velocidad del sonido}}$	$\frac{V}{a}$
Reynolds	Re	$\frac{\text{fuerza de inercia}}{\text{fuerza viscosa}}$	$\frac{\rho L^3 V / (L/V)}{\mu (V/L) L^2} = \frac{\rho V L}{\mu}$
Froude	Fr	$\frac{\text{fuerza de inercia}}{\text{fuerza de gravedad}}$	$\frac{\rho L^3 V / (L/V)}{\rho L^3 g} = \frac{V^2}{gL}$

Las magnitudes dimensionales características que se usan para definir los parámetros adimensionales son:

símbolo	magnitud
V	velocidad
L	longitud
ρ	densidad
g	aceleración gravitatoria
a	velocidad del sonido
μ	coeficiente de viscosidad