

FÍSICA: MECÁNICA Y ONDAS

DINÁMICA HAMILTONIANA

En este tema vemos unas nuevas ecuaciones del movimiento definidas a partir de las descritas mediante la función lagrangiana.

1. Función hamiltoniana

En el Tema 7 hemos visto como definir la función lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ con $\mathbf{q}$, coordenadas generalizadas de un sistema con n grados de libertad. Definimos H función hamiltoniana como:

$$H = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} = \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}$$

con n grados de libertad del sistema y

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$$

momentos generalizados.

Proposición:

Si $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, es decir, no depende explícitamente de t , el Hamiltoniano es una constante del movimiento.

Demostración:

Como en general, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}, \quad j = 1, \dots, n$$

Se verifica la ecuación de Lagrange luego $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \forall j$ y sustituyendo en lo anterior:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_j \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j}_{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}} + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \sum_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

usando la derivada de un producto.

$$\text{Como } H = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} \Rightarrow \frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) - \frac{d\mathcal{L}}{dt}$$

Identificando en la expresion de $\frac{d\mathcal{L}}{dt}$:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right)}_{\frac{d\mathcal{L}}{dt}} - \frac{d\mathcal{L}}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

$$\text{Si } \mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0$$

Ejemplo 1:

Partícula de masa m moviéndose en un plano bajo una fuerza central (ejercicio 2 hoja anterior).

Usando coordenadas polares teníamos que el lagrangiano era:

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r)$$

Como no hay condiciones las coordenadas r y θ son ambas generalizadas y habrá dos ecuaciones de movimiento:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + U'(r) = 0$$

$$m(2r\dot{r}\dot{\theta}^2 + r^2\ddot{\theta}) = 0$$

En este caso, la función hamiltoniana sería:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{j=1}^2 p_j \dot{q}_j - \mathcal{L} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} = \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \dot{r} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - \mathcal{L} = (m\dot{r})\dot{r} + (mr^2\dot{\theta}) - \left(\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r)\right) = \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r) = T + U \end{aligned}$$

que por ser una fuerza conservativa, en efecto se conserva. Véase que $\mathcal{L}$ no depende explícitamente de t .

La expresión de H corresponde a la transformada de Legendre de $\mathcal{L}$ respecto a $\dot{q}_j$ s.

2. Ecuaciones canónicas de Hamilton

En el caso de la dinámica Lagrangiana, se simplificaba el número de ecuaciones de movimiento y su expresión, pero aún así, había casos donde su resolución no era sencilla.

Vamos a ver que es posible deducir unas nuevas ecuaciones del movimiento usando el hamiltoniano que pueden ser una alternativa de resolución y que son equivalentes.

La forma habitual de llegar a ellas es mediante el Cálculo Variacional (Principio de Hamilton o Mínima Acción), pero podemos obtener las ecuaciones canónicas utilizando una herramienta puramente matemática: la diferencial total y la definición del Hamiltoniano.

En enfoque es distinto, ya que se considera todo el movimiento en lugar de tomar un instante arbitrario t , como se verá en **** Las **ecuaciones canónicas de Hamilton** son:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}; \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} : j = 1, \dots, n$$

con $p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$ los momentos generalizados y son equivalentes a las de Lagrange.

Demostración:

Sabemos que la Lagrangiana depende de las coordenadas, las velocidades y el tiempo: $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ y derivamos respecto al tiempo:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Calculamos la derivada de H respecto del tiempo de igual forma:

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{L} \Rightarrow \frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{L} \right) = \sum_j (\dot{p}_j \dot{q}_j + p_j \ddot{q}_j) - \frac{d\mathcal{L}}{dt}$$

Ahora, sustituimos la expresión de $d\mathcal{L}/dt$ anterior dentro de esta nueva:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_j (\dot{p}_j \dot{q}_j + p_j \ddot{q}_j) - \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_j (\dot{p}_j \dot{q}_j + p_j \ddot{q}_j) - \underbrace{\left(\sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right)}_{\frac{d\mathcal{L}}{dt}}$$

Como $p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_j \dot{p}_j \dot{q}_j + \sum_j p_j \ddot{q}_j - \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \dot{q}_j - \sum_j \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \sum_j \dot{p}_j \dot{q}_j - \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \dot{q}_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (1)$$

Por otro lado, como el Hamiltoniano es una función de $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, su derivada respecto del tiempo debe ser:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_j \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \quad (2)$$

(1) y (2) deben ser iguales por unicidad de la derivada, por lo que los coeficientes de $\dot{q}_j$, $\dot{p}_j$ y término independiente deben coincidir uno a uno. Al compararlos, obtenemos las ecuaciones canónicas. :

$$\frac{dH}{dt} = \sum_j \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j}_{\dot{q}_j} + \sum_j \underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j}_{-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}} + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial t}}_{-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}}$$

El primer sumando es directamente una de las ecuaciones a las que se quería llegar:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

El tercero es consecuencia la proposición de la sección anterior:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

En cuanto al segundo:

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}$$

vemos que, si se verifican las ecuaciones de Lagrange:

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) = -\frac{dp_j}{dt} = -\dot{p}_j \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial q_j} = -\dot{p}_j$$

Esta demostración demuestra que las ecuaciones de Hamilton son simplemente una consecuencia geométrica de cambiar las variables de velocidad (generalizada) a momento.

Ejemplo 2:

Buscamos las ecuaciones canónicas de Hamilton del ejemplo anterior:

$$H = m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2 - \left(\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r) \right) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r) \text{ energía mecánica}$$

- Momento generalizado para r :

$$r: p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

Ecuaciones canónicas:

$$\left. \begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \\ \dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = -mr\dot{\theta}^2 - U'(r) \end{aligned} \right\}$$

- Momento generalizado para θ :

$$\theta: p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

Ecuaciones canónicas:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \\ \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow p_\theta = mr^2\dot{\theta} = C$$

que sustituyendo en las ecuaciones para r :

$$\left. \begin{aligned} \dot{r} &= \frac{p_r}{m} \\ \dot{p}_r &= -mr\dot{\theta}^2 - U'(r) = -\frac{p_\theta^2}{mr^3} - U'(r) \end{aligned} \right\}$$

3. Principio variacional de la dinámica

3.1. Problemas variacionales

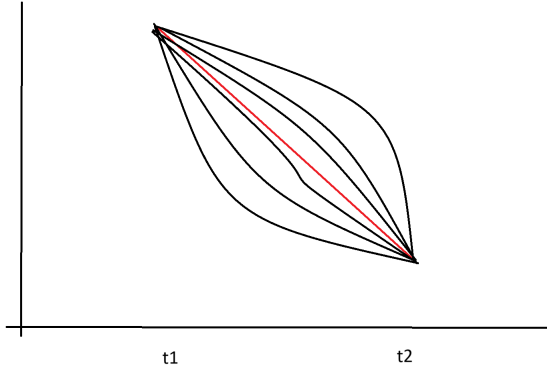
En general, el cálculo de variaciones, parte del análisis funcional, consiste en encontrar puntos estacionarios (**extremales**) de un (**funcional**), o función cuyos argumentos son a su vez funciones. En mecánica en particular interesa el mínimo.

En concreto, nos interesa para un funcional $f(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$, qué función $\mathbf{r}(t)$ hace extremo el valor de

la integral:

$$S(\mathbf{r}) = \int_{t_1}^{t_2} f(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) dt$$

Cada $\mathbf{r}$ es una trayectoria, así que definimos a las funciones $\mathbf{r}(t, \alpha) = \mathbf{r}(t) + \alpha \boldsymbol{\xi}(t)$ como las posibles trayectorias, con $\boldsymbol{\xi}(t)$ una función arbitraria que verifique $\boldsymbol{\xi}(t_1) = \boldsymbol{\xi}(t_2) = \mathbf{0}$ de forma que los puntos iniciales y finales de cada trayectoria posible coincidan.



Entonces,

$$S(\mathbf{r}, \alpha) = \int_{t_1}^{t_2} f(\mathbf{r}(t, \alpha), \dot{\mathbf{r}}(t, \alpha), t) dt$$

Como buscamos un punto estacionario, buscamos que se anule la derivada de S:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \alpha} \right] dt$$

$$\text{con } \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} = \boldsymbol{\xi}(t) \text{ y } \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \right) = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}(t)}{\partial t} \text{ puesto que } \mathbf{r}(t, \alpha) = \mathbf{r}(t) + \alpha \boldsymbol{\xi}(r).$$

$$\Rightarrow \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot \underbrace{\boldsymbol{\xi}(t)}_{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha}} + \frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}}_{\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \alpha}} \right) dt$$

Calculamos el segundo sumando por partes:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} dt$$

$$u = \frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \rightarrow du = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) dt$$

$$dv = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} dt \rightarrow v = \boldsymbol{\xi}(t)$$

$$\text{así: } \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} dt = \frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \boldsymbol{\xi}(t) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) \boldsymbol{\xi}(t) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) \boldsymbol{\xi}(t) dt$$

por la condición $\boldsymbol{\xi}(t_i) = \mathbf{0}, i = 1, 2$. Y la expresión buscada será:

$$\Rightarrow \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \boldsymbol{\xi}(t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) \boldsymbol{\xi}(t) \right) dt = 0$$

Como $\boldsymbol{\xi}(t) \neq \mathbf{0}$,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) = \mathbf{0} \quad (1)$$

Ejemplo 3:

Demostrar usando este apartado que la distancia más corta entre dos puntos del plano es la línea recta.

En este caso $S = \int_{x_1}^{x_2} ds$ con ds un infinitesimal de trayectoria y, como es habitual, por ser de tamaño infinitesimal despreciamos curvatura para tomar su longitud

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

y hay que buscar y , extremales (mínimo) de:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Según lo anterior aplicado a $f(y, y', x) = \sqrt{1 + (y')^2}$:

$$\frac{df}{dy} = 0 \text{ y } \frac{df}{dy'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}$$

luego por (1):

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right) = 0 \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \text{constante} \Rightarrow y' = a \Rightarrow y = ax + b$$

ecuación de una recta.

Ejemplo 4:

Se trata de un problema cuya solución no conocemos de manera intuitiva: el problema de la braquistócrona, enunciado por Johann Bernoulli en 1696:

Dados dos puntos A y B en un plano vertical, ¿cuál es la curva trazada por un punto sujeto sólo a la gravedad que, empezando en A , alcanza B en el menor tiempo?

Si A y B están en la misma vertical, es lógico pensar que el camino es sin duda un segmento. Sin embargo, contrariamente a la intuición, ya Galileo había notado que la curva trazada no es una recta.

Si s es el espacio recorrido por el punto y v es su velocidad, se tiene:

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow dt = \frac{ds}{v} \Rightarrow t = \int_A^B \frac{ds}{v}$$

Calculamos ahora la velocidad alcanzada por el punto cuando ha bajado de una altura y . El punto empieza en reposo, luego si E_A es su energía total en A , $E_A = 0$, considerando origen de coordenadas en A . Por hipótesis el punto sólo está sujeto al peso y no hay fricción, luego su energía total se conserva.

$$E_B = T_B + U_B = \frac{m}{2} v^2 - mgy = E_A = 0 \Rightarrow v = \sqrt{2gy}$$

Dado que la velocidad está en función de y , supongamos que la curva buscada venga dada por una función $x = x(y)$. Usamos intercambiando x e y , la expresión para la longitud infinitesimal de una porción del camino del ejemplo anterior:

$$ds = \sqrt{(x')^2 + 1} dy \text{ y } t = \int_A^B \sqrt{\frac{(x')^2 + 1}{2gy}} dy$$

Tenemos ahora que trabajar con el funcional $f = f(x, x', y) = \sqrt{\frac{(x')^2 + 1}{2gy}}$

$$\frac{df}{dx} = 0 \text{ y } \frac{df}{dx'} = \frac{2x'}{2\sqrt{2gy((x')^2 + 1)}}$$

Aplicando (1):

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{x'}{\sqrt{2gy((x')^2 + 1)}} \right) = 0 \Rightarrow \frac{x'}{\sqrt{2gy((x')^2 + 1)}} = C$$

con C constante.

$$\frac{x'}{\sqrt{2gy((x')^2 + 1)}} = C \Rightarrow \frac{x'^2}{2gy((x')^2 + 1)} = C^2 \Rightarrow x'^2 = \frac{2gyC^2}{1 - 2gyC^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x' = \sqrt{\frac{y}{\frac{1}{2gC^2} - y}} = \sqrt{\frac{y}{2R - y}} \text{ con } 2R = \frac{1}{2gC^2}$$

$$\text{y } x = \int \sqrt{\frac{y}{2R - y}} dy$$

que se resuelve mediante el cambio de variable:

$$y = R(1 - \cos\theta) \rightarrow dy = R \sin\theta d\theta$$

sustituyendo en la expresión:

$$x = \int \sqrt{\frac{R(1 - \cos\theta)}{R(1 + \cos\theta)}} R \sin\theta d\theta = \int \sqrt{\frac{(1 - \cos\theta)^2}{1 - \cos^2\theta}} R \sin\theta d\theta = \int (1 - \cos\theta) d\theta = \theta - \sin\theta$$

Luego la solución es una curva.

$$x = \theta - \sin\theta; \text{ y } y = R(1 - \cos\theta)$$

que es una especie de cicloide.

<https://www.mathcurve.com/courbes2d/brachistochrone/brachistochrone.shtml>

3.2. Principio variacional de Hamiltom

Este enfoque que usa lo anterior intenta analizar la trayectoria completa en lugar de para cada instante genérico t como en el enfoque newtoniano.

Definición:

Sea un sistema conservativo holónomo con $\mathcal{L} = T - U$ su función lagrangiana. Llamamos **integral de acción** a

$$S(t) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt$$

Proposición:

De todas las posibles trayectorias geométricas, la física real es la que minimiza la integral de acción.

La demostración consiste en identificar en la sección 3.1.:

$\mathbf{r} = \mathbf{q}$, coordenadas generalizadas

$f = \mathcal{L}$

con lo que la expresión (1) es:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = 0$$

que es la ecuación de Euler Lagrange, a la que se ha llegado por dinámica variacional.

Ventajas del enfoque:

Llegar a las ecuaciones de Euler Lagrange derivando la integral de acción presenta las ventajas:

- A diferencia de trabajar con las ecuaciones de Newton, no son necesarios vectores y componentes, por lo que el trabajo es independiente del sistema de coordenadas
- No solo es válido para mecánica clásica: también se puede usar en cuántica y relativista, mostrando mayor universalidad
- No concibe los problemas de movimiento en función de $\mathbf{F}$ fuerza que los provoca (enfoque Newtoniano) sino que define el movimiento como un problema de optimización global

Teorema de Noether

Dado un sistema caracterizado por el lagrangiano $\mathcal{L}$. Si este no contiene explícitamente a la variable q_i , aunque sí a su derivada, q_i es una coordenada cíclica (ignorable).

Demostración

$\mathcal{L}$ no depende explícitamente de q_i luego $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow$

y en la ecuación de Lagrange: $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = p_i = 0 \Rightarrow p_i$ es constante (se conserva), con p_i momento generalizado (ver sección 1).